MAY 25 1937

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 177

Heft 2

Ausgegeben am 22. April 1937

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1937

Band 177. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Neumer, Walter, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. III.	65
Hensel, Kurt, Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzgruppen eines algebraischen Körpers für alle Potenzen eines Primteilers als Modul	82
Krull, Wolfgang, Über einen Irreduzibilitätssatz von Bertini	94
Magnus, Wilhelm, Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren	105
Weiss, E. A., Das Linienelement als singuläre Punktreihe	116

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. III*).

Von *Walter Neumer* in Worms.

Dritter Abschnitt.

Über die gewöhnlichen Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung, die sich durch Berührungstransformationen auf lineare homogene Form bringen lassen.

§ 6. Die gewöhnlichen Diffgl.n 3. Ordnung.

1. Das System (254) schreiben wir für $n = 3$:

$$(310)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & U_\varrho = \sigma U, \quad U_{1\varrho 1} = (\varrho_1 + 2\sigma)U_{11} + (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)U_1 + \pi_1 U, \\ \text{(b)} & U_{111} = 3\alpha U_{11} + \beta U_{1\varrho} + \gamma U_1 + \delta U. \end{array}}$$

Die Derivierte dieser Gruppe wird definiert durch

$$(310')\qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & U_\varrho = \sigma U, \quad U_{1\varrho} = (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + \pi U, \\ \text{(b)} & U_{111} = 3\alpha U_{11} + (\gamma + (\varrho_1 + 2\sigma)\beta)\, U_1 + (\delta + \pi\beta)\, U. \end{array}}$$

Zu (310) berechnen wir die Int. Bed.n nach der Angabe von Satz 31; die Durchführung der Rechnung bietet nicht die geringste Schwierigkeit; wir merken lediglich an, daß die Op. $U_{1\varrho\varrho}$ wegen $U_\varrho = \sigma U$ und (226) vermöge (189b) für $f = U$ durch

$$(311)\qquad U_{1\varrho\varrho} = (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_{1\varrho} + (2\sigma_\varrho + \varrho_{1\varrho})\, U_1 + (2\sigma_{1\varrho} - \sigma_{\varrho 1} - \varrho_1\sigma_1)\, U$$

dargestellt wird; diese Formel können wir mit Rücksicht auf (244) auch so schreiben

$$(311')\qquad U_{1\varrho\varrho} = (\varrho_1 + 2\sigma)U_{1\varrho} + (2\sigma_\varrho + \varrho_{1\varrho})U_1 + (\pi_\varrho + \sigma\pi)U = ((\varrho_1 + 2\sigma)U_1 + \pi U)_\varrho,$$

und wir sehen, daß sich (311′) auch direkt aus $\mathfrak{U}_{\mathrm{I\,III}} = 0$ gewinnen läßt (s. (240)). Zur Abkürzung einiger Zwischenrechnungen empfiehlt es sich ferner, etwa die Bezeichnung

$$(312)\qquad U_{1^4} = \tilde\alpha U_{11} + \tilde\beta U_{1\varrho} + \tilde\gamma U_1 + \tilde\delta U$$

einzuführen. Wir erhalten dann die gewünschten Int. Bed.n:

---

*) Teil I und II sind in diesem Journal **176** (1937), S. 224—249, und **177** (1937), S. 13—36, erschienen. Die Abschnitte, Paragraphen, Sätze, Formeln und Anmerkungen sind in allen drei Teilen fortlaufend durchnumeriert.

(313)

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \alpha_\varrho = (\varrho_1 + \sigma)\alpha + \pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1, \\
\text{(b)} & \alpha_{1\varrho} = 2(\varrho_1 + \sigma)\alpha_1 + (\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\alpha + 2\pi_1 + \varrho_{111} + 2\sigma_{11}, \\
\text{(c)} & \gamma + \beta_\varrho - 2(\varrho_1 + \sigma)\beta = 0, \\
\text{(d)} & \gamma^*_\varrho = 2(\varrho_1 + \sigma)\gamma^* - 3(2\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\alpha + 6\pi_1 + \varrho_{111}, \\
\text{(d')} & \gamma^* = \gamma + (\varrho_1 + 2\sigma)\beta, \\
\text{(e)} & \delta + \gamma_1 + \beta_{1\varrho} - 3(\varrho_1 + \sigma)\beta_1 - 2(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\beta = 0, \\
\text{(f)} & \delta^*_\varrho = 3(\varrho_1 + \sigma)\delta^* - \pi\gamma^* - 3(2\pi_1 - \sigma_{11})\alpha + 3\pi_{11} - 2\sigma_{111}, \\
\text{(f')} & \delta^* = \delta + \pi\beta, \\
\text{(g)} & \left\{\begin{array}{l}\gamma^*_{1\varrho} = 3(\varrho_1 + \sigma)\,\gamma^*_1 + 2(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\gamma^* - 3(2\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\alpha_1 \\ \quad - 3(4\pi_1 + \varrho_{111} + \sigma_{11})\alpha + 9\pi_{11} + \varrho_{1^4} - 2\sigma_{111},\end{array}\right. \\
\text{(h)} & \left\{\begin{array}{l}\delta^*_{1\varrho} = 4(\varrho_1 + \sigma)\,\delta^*_1 + 3(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\delta^* - \pi\gamma^*_1 + (\sigma_{11} - 2\pi_1)\,(\gamma^* + 3\alpha_1) \\ \quad - 3(3\pi_{11} - 2\sigma_{111})\,\alpha + 4\pi_{111} - 3\sigma_{1^4}.\end{array}\right.
\end{array}
$$

Die Relationen (313a, b, d, f—h) könnte man noch einfacher herleiten; *sie sind nämlich die Int.Bed.n des Systems* (310′). (Man überlegt sich leicht, daß allgemein die Int. Bed.n zu dem System (254) bestehen 1) aus den Int. Bed.n zu den Defgl.n (261) der Derivierten der Gruppe (254) sowie 2) aus den beiden Relationen, welche durch Vergleichen der Koeffizienten von $U_{1\varrho}$ in (260) vermöge (254) für $s = n$ und $s = n + 1$ hervorgehen; die Int. Bed.n zu (261) ergeben sich aus der Forderung, daß (260) vermöge (261) für $s = n$ und $s = n + 1$ Identitäten liefern solle.)

Eliminiert man γ und δ mittels (313c, e) *aus* (313d, f—h), *so sind von den so entstehenden Relationen zwischen $\varrho, \sigma, \pi, \alpha, \beta$ die Relationen* (313f, g) *vermöge* (226), (244), (313d) *und der Identität* (189b) *für $f = \beta$ miteinander äquivalent.*

Das System (279) lautet für $n = 3$:

(314)

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & U_{\varrho\varrho} = -\varrho_1 U_\varrho + \varrho_3 U, \quad U_{\varrho 1} = \tau U_\varrho + \sigma U_1 + (\sigma_1 - \sigma\tau)U, \\
\text{(b)} & U_{1\varrho 1} = (\varrho_1 + 2\sigma)U_{11} + \varkappa U_\varrho + (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)U_1 + (\pi_1 - \sigma\varkappa)U, \\
\text{(c)} & U_{111} = 3\alpha U_{11} + \beta U_{1\varrho} + \vartheta U_\varrho + \gamma U_1 + (\delta - \sigma\vartheta)U.
\end{array}
$$

Zu diesem System berechnen wir gemäß Satz 32 die Gr. Bed.n. Die Rechnung verläuft ohne Schwierigkeiten, wobei wir noch bemerken, daß man mit Vorteil die Abkürzung

$$U_{1^4} = \tilde\alpha U_{11} + \tilde\beta U_{1\varrho} + \tilde\vartheta U_\varrho + \tilde\gamma U_1 + (\tilde\delta - \sigma\tilde\vartheta)\,U \tag{315}$$

verwendet; vermöge $U_\varrho = \sigma U$ geht (315) in (312) über. Wir bekommen so die Relationen:

(316)

$$\text{(a)}\quad \vartheta = 2\beta\tau + \beta_1, \qquad \text{(b)}\quad \varkappa + \alpha^{[1]} \equiv \varkappa + \alpha\tau + \alpha_1 = 0,$$

(317)

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \gamma^*_1 + 2\tau\gamma^* - 3(2\varkappa - \tau^{[1]})\,\alpha + 3\varkappa^{[1]} - 2\tau^{[2]} = 0, \\
\text{(b)} & \delta^*_1 + 3\tau\delta^* - (\varkappa - \tau^{[1]})\,\gamma^* - 3(\varkappa^{[1]} - \tau^{[2]})\,\alpha + \varkappa^{[2]} - \tau^{[3]} = 0.
\end{array}
$$

Eliminieren wir $\varkappa$ aus (317) vermöge (316), so erhalten wir mit Hilfe der Formel (389):

(318)

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \tau^{[2]} \equiv \tau_{11} + 3\tau\tau_1 + \tau^3 = \psi\tau + \tfrac{1}{2}\psi_1, \\
\text{(a')} & \psi = \gamma^* + 3(\alpha^2 - \alpha_1), \\
\text{(b)} & 3\omega\tau + \omega_1 = 0, \\
\text{(b')} & \omega = \delta^* - \tfrac{1}{2}\psi_1 + \alpha\psi - \alpha_{11} + 3\alpha\alpha_1 - \alpha^3.
\end{array}
$$

Da, wie eine einfache Rechnung lehrt, die Relationen (276) *eine Folge von* (316b), (313a, b) *und* (267) *sind*, definiert (310) nach Satz 33 eine $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}_{3+1}, \mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{3+1}, \mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{3+1}$, je nachdem aus (267) + (318) $0, 1, \infty^2$ Größen τ bestimmt werden können. Hierüber entscheidet nun das Verhalten von ω. Denn wenn $\omega = 0$, dann verbleiben zur Bestimmung von τ nur die drei Diffgl.n (267) + (318a). Diese besitzen jedoch nach Satz 20 in der Tat ∞^2 Lösungen. Denn zunächst trifft für (267) wegen (226) die Voraussetzung des Satzes 19 zu; ferner gilt vermöge (313) das Formelpaar:

$$\boxed{\psi_\varrho = 2((\varrho_1 + \sigma)\psi - \varrho_{111} - 3\sigma_{11}), \quad \psi_{1\varrho} = 3(\varrho_1 + \sigma)\psi_1 + 2((\varrho_{11} + 2\sigma_1)\psi - \varrho_{1^4} - 4\sigma_{111}),} \tag{319}$$

welches die gemäß Satz 20 zu fordernden Int. Bed.n für die Diffgl.n (267) + (318a) repräsentiert, wie man mit Benutzung der Formel (259′) leicht nachprüft.

Wenn aber $\omega \neq 0$, dann folgt aus (318b)

$$\boxed{\tau = -\frac{\omega_1}{3\omega},} \tag{320}$$

und Einsetzen dieses Wertes für τ in (267), (318a) liefert neue Relationen für die Koeffizienten von (310). Indessen stellt nur (318a) + (320) eine neue Relation dar, da (267) + (320) vermöge (313) erfüllt sind, denn auf Grund von (313) bzgl. (319) bestehen die beiden Beziehungen

$$\boxed{\omega_\varrho - 3(\varrho_1 + \sigma)\,\omega = 0, \quad \omega_{1\varrho} - 4(\varrho_1 + \sigma)\,\omega_1 - 3(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\omega = 0\,.} \tag{321}$$

Die Relationen (321) sind den Relationen (313f, h) gleichwertig. Demnach haben wir das folgende Ergebnis gefunden:

Theorem 4. *Die allgemeinste $\mathcal{G}_{3+1}$ wird durch die Defgl.n* (310) *mit den Koeffizienten-Relationen* (226), (244), (313) *charakterisiert; eine der Relationen* (313f, g) *ist überzählig, wenn γ, δ vermittels* (313c, e) *eliminiert werden. Ferner dürfen die Relationen* (313f, h) *durch* (321) *ersetzt werden. Insbesondere ist die Gruppe* (310) *eine $\mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{3+1}$, wenn $\omega = 0$, und eine $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{3+1}$, wenn $\omega \neq 0$, aber die Bedingung* (318a) + (320) *erfüllt ist. Andernfalls liegt eine $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}_{3+1}$ vor.*

2. Nun wenden wir uns zur invarianten $\mathcal{D}_3$ der $\mathcal{G}_{3+1}$ (310). Vermöge (173′), (297), (310a) wird

$$\begin{aligned}\eta''' = &- y'^{\varrho\,3} U_{111} - 3y'^{(\varrho)}(\varrho y''' + \varrho_\varrho y''^2 + 2(\varrho_1 + \sigma)\, y'^{(\varrho)} y'')\, U_{11} \\ &- ((1 + 3\varrho y'')\, y''' + 2\varrho_\varrho y''^3 + 3(\varrho_1 + \sigma)\, y'^{(\varrho)} y''^2)\, U_{1\varrho} - [3(\varrho_\varrho + \varrho(\varrho_1 + \sigma))\, y'' y''' \\ &+ 2(\varrho_1 + \sigma)\, y''' + (\varrho_{\varrho\varrho} + \varrho_\varrho(\varrho_1 + \sigma))\, y''^3 + 3(\varrho_{1\varrho} + \sigma_\varrho)\, y'^{(\varrho)} y''^2 \\ &+ 3(\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\, y'^{(\varrho)2} y'']\, U_1 + \mathsf{H}'''_{0)} U\,,\end{aligned} \tag{322}$$

so daß wir vermöge (310b) auf Grund des Satzes 34 und der Formeln (300′), (300) nach Abspaltung des Faktors $y'^{(\varrho)}$ aus $\Delta_{3)}$ zu der invarianten Diffgl. gelangen

$$y''' - \varrho_\varrho y''^3 - 3(\varrho_1 + \sigma)\, y'^{(\varrho)} y''^2 - 3\alpha\, y'^{(\varrho)2} y'' + \beta\, y'^{(\varrho)3} = 0 \tag{323}$$

oder, wenn für $y'^{(\varrho)}$ sein Wert $\varrho y'' + 1$ eingesetzt wird:

$$\boxed{y''' - Ay''^3 + 3By''^2 - 3Cy'' + D = 0,} \tag{324}$$

$$\boxed{\begin{cases} A = \varrho_\varrho + 3\varrho(\varrho_1 + \sigma) + 3\varrho^2\alpha - \varrho^3\beta, \quad B = -(\varrho_1 + \sigma) - 2\varrho\alpha + \varrho^2\beta, \\ C = \alpha - \varrho\beta, \quad D = \beta. \end{cases}} \tag{324′}$$

Aus (324′) in Verbindung mit (226), (244), (313) haben wir jetzt umgekehrt die Koeffizienten des Systems (310) durch die Koeffizienten der Diffgl. (324) zu bestimmen sowie die charakteristischen Relationen zwischen letzteren herzuleiten. Zunächst lassen sich die Gleichungen (324′) nach $\beta, \alpha, \sigma, \varrho_\varrho$ auflösen:

(325)
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(a)}\quad \beta = D, \quad \text{(b)}\quad \alpha = D\varrho + C, \quad \text{(c)}\quad \sigma = -\varrho_1 - u, \quad \text{(c′)}\quad u = D\varrho^2 + 2C\varrho + B, \\ \qquad\qquad \text{(d)}\quad \varrho_\varrho = v, \qquad \text{(d′)}\quad v = D\varrho^3 + 3C\varrho^2 + 3B\varrho + A\,.\end{array}}$$

Dann können vermöge (325) auf Grund von (313 a, c, e) die Größen π, γ, δ ebenfalls durch A, B, C, D, ϱ und ihre Op.n ausgedrückt werden, so daß wir nur noch ϱ durch A, B, C, D zu bestimmen haben. Dazu stehen dann die Relationen (226), (244), (325 d), (313 b, d), (321) zur Verfügung (s. die Bemerkung zu (313) bzgl. (321)). Einsetzen der Werte (325 c, d) für σ, ϱ_ϱ in (226) liefert nun

(326)
$$\boxed{\varrho_{1\varrho} = \tfrac{1}{2}(\varrho_1^2 + w) = \tfrac{1}{2}(\varrho_1^2 + v_1 + u\varrho_1 - u_\varrho + u^2).}$$

Rechnen wir die Identität (189 b) aus für $f = \varrho$ vermöge (325 d) und (326), so kommt

(327)
$$v_{\varrho 1} - 2v_{1\varrho} + \tfrac{1}{2}w_\varrho + \varrho_1(2v_1 - w) = 0.$$

Diese Relation müssen wir weiter auswerten; zu diesem Zweck führen wir die Bezeichnung ein

(328) $G_{(j_1 \cdots j_s)} = \sum_{i=0}^{m} g_{i)j_1 \ldots j_s}\, \varrho^{m-i}$ $(j_1, \ldots, j_s = 1, 2, 3, \varrho)$, wenn $G = \sum_{i=0}^{m} g_{i)}(x, y, y')\, \varrho^{m-i}$;

da ferner die Beziehungen stattfinden

(329)
$$\frac{\partial v}{\partial \varrho} = 3u, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 2\alpha,$$

so gilt mit Benutzung von (328) auch allgemein

(329′)
$$\frac{\partial v_{(j_1 \cdots j_s)}}{\partial \varrho} = 3u_{(j_1 \cdots j_s)}, \qquad \frac{\partial u_{(j_1 \cdots j_s)}}{\partial \varrho} = 2\alpha_{(j_1 \cdots j_s)} \qquad (j_1, \ldots, j_s = 1, 2, 3, \varrho).$$

Aus (328)–(329′) ergibt sich endlich

(330)
$$v_{(j_1 \cdots j_s)k} = 3u_{(j_1 \cdots j_s)}\varrho_k + v_{(j_1 \cdots j_s k)}, \qquad u_{(j_1 \cdots j_s)k} = 2\alpha_{(j_1 \cdots j_s)}\varrho_k + u_{(j_1 \cdots j_s k)}$$
$$(j_1, \ldots, j_s, k = 1, 2, 3, \varrho; \quad s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Unter Verwendung der Formeln (330) erhalten wir aus (327) wegen (325 d), (326):

(331)
$$\begin{aligned} &v_{(21)} - \tfrac{3}{2}v_{(12)} - \tfrac{1}{2}u_{(22)} + \tfrac{1}{2}\varrho(u_{(21)} + u_{(12)} + v_{(11)} - \varrho u_{(11)}) \\ &\quad - \alpha v_{(2)} + 3uu_{(2)} - 2v\alpha_{(2)} + (u + \varrho\alpha)\, v_{(1)} - (v + 3\varrho u)\, u_{(1)} \\ &\quad + 2\varrho v\alpha_{(1)} + (\alpha u - Dv)\, v + 2(\alpha v - u^2)\, u = 0. \end{aligned}$$

Nach einigen Zwischenrechnungen, die sich durch die folgenden Bezeichnungen und Beziehungen

(332)
$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad u' = C\varrho^2 + 2B\varrho + A; \quad \alpha' = C\varrho + B, \quad \alpha'' = B\varrho + A, \\ &\text{(b)}\quad u = \varrho\alpha + \alpha', \quad u' = \varrho\alpha' + \alpha''; \quad v = \varrho u + u' = \varrho^2\alpha + 2\varrho\alpha' + \alpha'', \\ &\text{(c)}\quad v_{(j_1 \cdots j_s)} = \varrho u_{(j_1 \cdots j_s)} + u'_{(j_1 \cdots j_s)} \text{ usw.} \qquad (j_1, \ldots, j_s = 1, 2, 3, \varrho) \end{aligned}$$

wesentlich erleichtern lassen, gelangen wir schließlich nach Multiplikation mit 2 von (331) zu der Relation:

(333) $$\Lambda\varrho^3 - \mathsf{M}\varrho^2 + \mathsf{N}\varrho - \mathsf{P} = 0$$

(333′)
$$\begin{aligned}
\Lambda &= C_{11} - 2D_{12} + 3D_{21} + 2D(2B_1 + C_2) - 2C(3C_1 + D_2) \\
&\quad + 2BD_1 + 2(AD^2 - 3BCD + 2C^3), \\
\mathsf{M} &= -2B_{11} + 7C_{12} - 8C_{21} + D_{22} - 2(2DA_1 + AD_1) \\
&\quad + 6B(C_1 + D_2) - 6CC_2 - 6(ACD + BC^2 - 2B^2D), \\
\mathsf{N} &= A_{11} - 8B_{12} + 7B_{21} - 2C_{22} + 6C(A_1 + B_2) \\
&\quad - 2(DA_2 + 2AD_2) - 6BB_1 - 6(ABD - 2AC^2 + B^2C), \\
\mathsf{P} &= 3A_{12} - 2A_{21} + B_{22} - 2B(A_1 + 3B_2) + 2CA_2 \\
&\quad + 2A(B_1 + 2C_2) + 2(-3ABC + A^2D + 2B^3).
\end{aligned}$$

Im Anschluß an die Gleichung (333) beweisen wir einen Satz, der uns bald nützlich werden wird:

Satz 36. *Die Relationen*

(334) $$\Lambda = 0, \quad \mathsf{M} = 0, \quad \mathsf{N} = 0, \quad \mathsf{P} = 0$$

sind gegenüber B. T.n der Diffgl. (324) *invariant, und diese Diffgl. kann vermöge* (334) *in die Form gebracht werden*

(335) $$\tilde{y}''' - \tilde{A}\tilde{y}''^3 + 3\tilde{B}\tilde{y}''^2 = 0.$$

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns die $\mathcal{G}_{3+1}$ (310) mittels der B. T. (161) unter Verwendung der Trf.s-Formeln (202)—(204) in die folgende $\mathcal{G}_{3+1}$ transformiert

(336)
$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \mathfrak{U}_\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{r}\mathfrak{I}} = ((\mathfrak{r}_\mathfrak{I} + 2\mathfrak{s})\,\mathfrak{U}_\mathfrak{I} + \mathfrak{p}\mathfrak{U})_\mathfrak{I}, \\
&\text{(b)} \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{I}\mathfrak{I}\mathfrak{I}} = 3\mathfrak{a}\,\mathfrak{U}_{\mathfrak{I}\mathfrak{I}} + \mathfrak{b}\mathfrak{U}_{\mathfrak{I}\mathfrak{r}} + \mathfrak{c}\mathfrak{U}_\mathfrak{I} + \mathfrak{d}\mathfrak{U}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt u. a.

(336′)
$$\text{(a)} \quad \varrho = \frac{X_2 + P_2\mathfrak{r}}{X_1 + P_1\mathfrak{r}}, \qquad \text{(b)} \quad \sigma = \frac{\Delta\mathfrak{s} - \Delta_\mathfrak{r}}{X_1 + P_1\mathfrak{r}},$$
$$\text{(c)} \quad \alpha = \mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_\mathfrak{I}, \mathfrak{r}_\mathfrak{r}), \qquad \beta = \mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_\mathfrak{I}, \mathfrak{r}_\mathfrak{r}),$$

unter $\mathfrak{F}$ eine Abhängigkeit verstanden, in welche noch die Op.n von X, P (bezüglich ∂_1, ∂_2) eingehen. Die Diffgl. (324) verwandelt sich in eine Diffgl. von wieder der gleichen Gestalt

(337) $$\mathfrak{y}''' - \mathfrak{A}\mathfrak{y}''^3 + 3\mathfrak{B}\mathfrak{y}''^2 - 3\mathfrak{C}\mathfrak{y}'' + \mathfrak{D} = 0;$$

die A, B, C, D hängen *linear* von den $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ab und umgekehrt:

(337′) $$A, B, C, D = \mathfrak{L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}),$$

wobei in die linearen Abhängigkeiten $\mathfrak{L}$ wieder die Op.n von X, P eingehen. Andererseits ist (337) wieder die $\mathfrak{D}_3$ der $\mathcal{G}_{3+1}$ (336), d. h. es gilt

(338)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \mathfrak{r}_\mathfrak{r} + 3\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_\mathfrak{I} + \mathfrak{s}) + 3\mathfrak{r}^2\mathfrak{a} - \mathfrak{r}^3\mathfrak{b}, \\
\mathfrak{B} &= -(\mathfrak{r}_\mathfrak{I} + \mathfrak{s}) - 2\mathfrak{r}\mathfrak{a} + \mathfrak{r}^2\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{a} - \mathfrak{r}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{b}.
\end{aligned}$$

Die Trf.s-Gleichungen (337′) sind also vermöge (165) eine Folge von (324′), (338) und (336′), da ja die Größen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{I}$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{r}$ auf Grund der Koeffizienten-Relationen zu (336) noch willkürlich bleiben. Darin liegt die *Invarianz* der Beziehungen (324′) gegenüber B. T.n, wenn nämlich α, β, σ, ϱ vermöge (336′) und A, B, C, D vermöge (337′) transformiert werden. Folglich bleiben auch die mit (324′) gleichwertigen Beziehungen (325) gegenüber B. T.n invariant, insbesondere die Gleichungen (325 c, d), da in ihnen α, β gar nicht vorkommen und ϱ, σ unter sich transformiert werden (speziell geht (325 d) in sich über, denn diese Gleichung ist Ausdruck der Tatsache, daß die Diffgl. 2. O.

$\varrho y'' + 1 = 0$ ein erstes Integral der Diffgl. (324) darstellt). Ferner bleibt die Relation (226) gegenüber B. T.n ungeändert; *also ist auch das mit* (325 c, d) + (226) *äquivalente System* (325 c, d) + (326) *gegenüber B. T.n invariant, und insbesondere muß* (325 d) + (326) *erhalten bleiben, da in diesen beiden Gleichungen* σ *nicht auftritt.* Nach Satz 19 stellen nun die Relationen (334) die Int. Bed.n der Diffgl.n (325 d), (326) für ϱ dar (s. (333)); damit ist aber der erste Teil des Satzes 36 bewiesen, denn die Int. Bed.n eines invarianten Systems von Diffgl.n sind ja selber invariant.

Nehmen wir also an, daß die Relationen (334) erfüllt sind, dann gibt es ∞^∞ Lösungen ϱ der Diffgl.n (325 d), (326). Ist nun ϱ eine dieser Lösungen und σ die zu ihr durch (325 c) bestimmte Größe, so daß also ϱ, σ der Bedingung (226) genügen, dann können wir durch eine geeignete B. T. ϱ, σ in 0, 0 überführen; die transformierten Gleichungen (325 c, d), (326) werden daher durch das Paar $\varrho = 0$, $\sigma = 0$ befriedigt, was mit dem Verschwinden der transformierten Größen A, B gleichbedeutend ist. Damit ist gezeigt, daß die Diffgl. (324) in die einfachere Form

$$y''' - 3Cy'' + D = 0 \tag{339}$$

verwandelt werden kann. Die B. T. (303) führt dann die Diffgl. (339) über in

$$\mathfrak{y}''' - D\mathfrak{y}''^3 + 3C\mathfrak{y}''^2 = 0, \tag{339'}$$

also in die Form (335).

3. Fahren wir in der Bestimmung von ϱ fort! Die Relation (244) liefert vermöge (313a), (325) und (326) mit Rücksicht auf (330):

$$\alpha_{(22)} + 4u_{(12)} - \tfrac{7}{2}u_{(21)} - \varrho(\alpha_{(21)} + \alpha_{(12)}) - \tfrac{1}{2}(v_{(11)} + \varrho u_{(11)}) + \varrho^2\alpha_{(11)} + Dv_{(2)} - 3\alpha u_{(2)}$$
$$+ 2D_2v - (3\alpha + D\varrho)v_{(1)} + 3(\varrho\alpha + u)u_{(1)} - 2D_1\varrho v + 3\alpha(u^2 - \alpha v) + 3v(Du - \alpha^2) = 0,$$

und indem wir von (332) Gebrauch machen, erhalten wir hieraus nach Multiplikation mit -2:

$$3\Lambda\varrho^2 - 2\mathsf{M}\varrho + \mathsf{N} = 0. \tag{340}$$

Aus (313 b) finden wir

$$\boxed{\varrho_{111} = -2u_{11} + \alpha\varrho_{11} + \alpha_{1\varrho} - 2\alpha_{\varrho 1}} \tag{341}$$

und aus (313 d, c) wegen (341)

$$2u_{(11)} - \varrho\alpha_{(11)} - D_{11}\varrho^2 + 8\alpha_{(21)} - 7\alpha_{(12)} + (D_{12} + D_{21})\varrho - D_{22} + 6(\alpha\alpha_{(2)} - D_2u) + 4Dv_{(1)}$$
$$+ 2D_1(v + 3\varrho u) - 6(u + \varrho\alpha)\alpha_{(1)} + 6(\alpha^2 - Du)u + 6D(\alpha v - u^2) = 0;$$

diese Relation reduziert sich aber auf

$$3\Lambda\varrho - \mathsf{M} = 0. \tag{342}$$

Weiterhin ergibt sich die bemerkenswerte Beziehung

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2}\Lambda.} \tag{343}$$

Die Gleichungen (340) und (333) lassen sich mittels (342) vereinfachen zu

$$\mathsf{M}\varrho - \mathsf{N} = 0, \quad \mathsf{N}\varrho - 3\mathsf{P} = 0. \tag{344}$$

Aus (342) und (344) folgt dann durch Elimination von ϱ

$$\boxed{3\Lambda\mathsf{N} - \mathsf{M}^2 = 0, \quad 9\Lambda\mathsf{P} - \mathsf{MN} = 0, \quad 3\mathsf{MP} - \mathsf{N}^2 = 0.} \tag{345}$$

Wenn $\Lambda \neq 0$, so kann ϱ aus (342) berechnet werden, und damit ist die *einzige* von (324) gestattete $\mathcal{G}_{3+1}$ bestimmt. Wenn $\Lambda = 0$, dann verschwinden zufolge (345) auch M und N; ist jetzt $\mathsf{P} \neq 0$, so liefert (344): $\varrho = \infty$. Auch in diesem Falle gestattet (324) nur *eine* $\mathcal{G}_{3+1}$, wie wir erkennen, wenn wir die Defgl.n der $\mathcal{G}_{3+1}$ (310) in der Form (302) für $n = 3$ zugrunde legen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(a)} \quad U^{\bar\varrho} = \bar\sigma U, \qquad U_2{}^{\bar\varrho}{}_2 = ((\bar\varrho_2 + 2\bar\sigma)U_2 + \bar\pi U)_2, \\ &\text{(b)} \quad U_{222} = 3\bar\alpha U_{22} + \bar\beta U_2{}^{\bar\varrho} + \bar\gamma U_2 + \bar\delta U. \end{aligned}} \tag{346}$$

Berechnen wir nach der Vorschrift des Satzes 35 die invariante $\mathcal{D}_3$ der Gruppe (346) aus (324), (324′), so finden wir für sie wieder die Gestalt (324) und zwar ist jetzt

$$\boxed{\begin{gathered} A = \bar\beta, \; B = \bar\alpha - \bar\varrho\bar\beta, \qquad C = -(\bar\varrho_2 + \bar\sigma) - 2\bar\varrho\bar\alpha + \bar\varrho^2\bar\beta, \\ D = \bar\varrho^{\bar\varrho} + 3\bar\varrho(\bar\varrho_2 + \bar\sigma) + 3\bar\varrho^2\bar\alpha - \bar\varrho^3\bar\beta. \end{gathered}} \tag{347}$$

Bezeichnen wir mit $\bar F$ die Größe, welche aus F durch Ausübung der Substitution $\mathfrak{S}$ ((208)) bei gleichzeitiger Vertauschung von A mit D, B mit C entsteht, dann gewinnen wir die Beziehungen (347) offenbar aus (324′) mittels der Substitution

$$S = (\partial_1\partial_2)\,(\varrho\bar\varrho)\,(\partial_\varrho\partial^{\bar\varrho})\,(AD)\,(BC)\,(F\bar F); \qquad \varrho\bar\varrho = 1. \tag{348}$$

Ganz allgemein gilt offenbar

Satz 37. *Die Beziehungen zwischen den Koeffizienten des Systems* (310) *und den Koeffizienten der Diffgl.* (324) *verwandeln sich durch Ausübung der Substitution* (348) *in die äquivalenten Beziehungen zwischen den Koeffizienten von* (346) *und* (324).

Wir erhalten so wegen

$$S\Lambda = \mathsf{P}, \quad S\mathsf{M} = \mathsf{N}, \quad S\mathsf{N} = \mathsf{M}, \quad S\mathsf{P} = \Lambda \tag{349}$$

aus (342) und (344) sowie aus (343):

$$3\mathsf{P}\bar\varrho - \mathsf{N} = 0, \quad \mathsf{N}\bar\varrho - \mathsf{M} = 0, \quad \mathsf{M}\bar\varrho - 3\Lambda = 0, \tag{350}$$

$$\boxed{\bar\omega = \tfrac{1}{2}\mathsf{P}.} \tag{351}$$

Wegen $\bar\varrho = \dfrac{1}{\varrho}$ ist (342) + (344) mit (350) gleichbedeutend, *so daß in der Tat* ϱ *bzgl.* $\bar\varrho$ *vermöge* (342), (344) *bzgl.* (350) *durch* A, B, C, D *und ihre Op.n ausgedrückt werden kann, sobald eine der Größen* Λ, P *von Null verschieden ist:*

$$\boxed{\varrho = \frac{1}{\bar\varrho} = \frac{\mathsf{M}}{3\Lambda} = \frac{\mathsf{N}}{\mathsf{M}} = \frac{3\mathsf{P}}{\mathsf{N}}.} \tag{352}$$

Verschwinden jedoch Λ, P beide, was wegen (345) die Relationen (334) nach sich zieht, dann kann ϱ nicht mehr durch eine *endliche* Gleichung bestimmt werden; denn wegen (343) und (351) müssen dann nach Theorem 4 die von (324) gestatteten $\mathcal{G}_{3+1}$ Gruppen $\mathcal{G}_{3+1}^{\mathrm{III}}$ sein, d. h. die Diffgl (324) muß eine $\mathcal{D}_3^{\mathrm{III}}$ darstellen. Der Satz 28 sagt aber für diesen Fall aus, *daß es zu der Diffgl.* (324) ∞^3 *Größen* ϱ *geben muß, die jedenfalls als die Lösungen der drei Diffgl.n* (325 d), (326), (341) *aufzufassen sind.* Gelingt uns der Nachweis, daß diese Diffgl.n vermöge (334) unbeschränkt integrabel sind, so ist damit die naheliegende Vermutung bestätigt, daß die Relationen (334) auch *hinreichen*, damit die Diffgl. (324)

in $y''' = 0$ verwandelt werden kann; denn die Relationen (321) sind ja wegen (343) vermöge $\Lambda = 0$ erfüllt. Die Int. Bed.n zu (325 d), (326), (341) können auf Grund des Satzes 20 berechnet werden, wobei wir wegen Satz 36 die Rechnung nur für den Fall $C = D = 0$ durchzuführen brauchen. Die Relationen (334) lauten dann

$$(353)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad B_{11} = 0, \qquad \text{(b)}\quad A_{11} - 8B_{12} + 7B_{21} - 6BB_1 = 0, \\ &\text{(c)}\quad 3A_{12} - 2A_{21} + B_{22} - 2B(A_1 + 3B_2) + 2AB_1 + 4B^3 = 0 \end{aligned}$$

und die Diffgl.n (325d), (326), (341) wegen (353a)

$$(354)\quad \varrho_\varrho = 3B\varrho + A, \quad \varrho_{1\varrho} = \tfrac{1}{2}(\varrho_1^2 + 4(B\varrho)_1 + A_1 - B_2 + B^2), \quad \varrho_{111} = 0.$$

Aus (353 a, b) finden wir unter Zuhilfenahme der ∂-Relationen:

$$(355)\qquad B_{2111} = 0, \quad A_{1111} = 0;$$

vermöge (353 a, b) und (355) sind aber die in Satz 20 genannten Int. Bed.n zu (354) erfüllt (man verwende zum Nachweis die Formel (259′) für $f = \varrho$).

Damit sind wir am Ziel, und wir können im Hinblick auf Theorem 4 die Ergebnisse dieser und der vorangehenden Ziffer zusammenfassen in

Theorem 5. I. *Die Relationen* (334) *sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Diffgl.* (324) *durch B. T. in* $y''' = 0$ *transformiert werden kann. Die Relationen* (334) *repräsentieren außerdem die Int. Bed.n zu den partiellen Diffgl.n*

$$(356)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \varrho_\varrho = v = D\varrho^3 + 3C\varrho^2 + 3B\varrho + A, \\ &\text{(b)}\quad \varrho_{1\varrho} = \tfrac{1}{2}(\varrho_1^2 + v_1 + u\varrho_1 - u_\varrho + u^2), \qquad \text{(b′)}\quad u = D\varrho^2 + 2C\varrho + B, \\ &\text{(c)}\quad \varrho_{111} = -2u_{11} + \alpha\varrho_{11} + \alpha_{1\varrho} - 2\alpha_{\varrho 1}, \qquad \text{(c′)}\quad \alpha = D\varrho + C, \end{aligned}$$

sowie zu den mit (356) *nach Satz* 37 *äquivalenten*

$$(\overline{356})\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \overline{\varrho}^{\bar\varrho} = \bar v = A\overline{\varrho}^3 + 3B\overline{\varrho}^2 + 3C\overline{\varrho} + D \qquad \left(\bar\varrho = \frac{1}{\varrho}\right), \\ &\text{(b)}\quad \overline{\varrho}_2^{\,\bar\varrho} = \tfrac{1}{2}(\overline{\varrho}_2^2 + \bar v_2 + \overline{u}\,\overline{\varrho}_2 - \overline{u}^{\bar\varrho} + \overline{u}^2), \qquad \text{(b′)}\quad \overline{u} = A\overline{\varrho}^2 + 2B\overline{\varrho} + C, \\ &\text{(c)}\quad \overline{\varrho}_{222} = -2\overline{u}_{22} + \bar\alpha\varrho_{22} + \bar\alpha_2{}^{\bar\varrho} - 2\bar\alpha^{\bar\varrho}{}_2, \qquad \text{(c′)}\quad \bar\alpha = A\overline{\varrho} + B. \end{aligned}$$

II. *Ist wenigstens eine der beiden Größen* Λ, P *von Null verschieden, dann sind die Relationen* (352), (345), (356) *und*

$$(357)\qquad \Lambda_\varrho + 3u\Lambda = 0, \quad \Lambda_{1\varrho} + 4u\Lambda_1 + 3(\varrho_{11} + 2u_1)\Lambda = 0$$

oder die äquivalenten Relationen (352), (345), $(\overline{356})$ *und*

$$(\overline{357})\qquad \mathsf{P}^{\bar\varrho} + 3\overline{u}\mathsf{P} = 0, \quad \mathsf{P}_2{}^{\bar\varrho} + 4\overline{u}\mathsf{P}_2 + 3(\overline{\varrho}_{22} + 2\overline{u}_2)\mathsf{P} = 0$$

notwendig und hinreichend, damit die Diffgl. (324) *auf lineare homogene Form gebracht werden kann. Dann und nur dann, wenn außerdem noch die Beziehung*

$$(358)\quad (\tau_{11} + 3\tau\tau_1 + \tau^3 - \psi\tau - \tfrac{1}{2}\psi_1)_{\tau = -\frac{\Lambda_1}{3\Lambda}} = 0 \quad (\psi = 3(\alpha^2 - \alpha_1) - D(\varrho_1 + 4u) - D_\varrho)$$

oder die vermöge (345), (356), (357) *äquivalente*

$$(\overline{358})\quad (\overline{\tau}_{22} + 3\overline{\tau}\,\overline{\tau}_2 + \overline{\tau}^3 - \overline{\psi}\overline{\tau} - \tfrac{1}{2}\overline{\psi}_2)_{\bar\tau = -\frac{\mathsf{P}_2}{3\mathsf{P}}} = 0 \quad (\overline{\psi} = 3(\overline{\alpha}^2 - \overline{\alpha}_2) - A(\overline{\varrho}_2 + 4\overline{u}) - A^{\bar\varrho})$$

erfüllt ist, kann die Diffgl. (324) *lineare homogene Form mit konstanten Koeffizienten erhalten.*

§ 7. Die gewöhnlichen Diffgl.n 4. Ordnung

1. Die allgemeinste $\mathcal{G}_{4+1}$ von B. T.n möge durch das folgende System definiert werden (s. (254))

$$(359)\qquad \boxed{\begin{array}{ll}(a) & U_{\varrho} = \sigma U, \quad U_{1\varrho 1} = ((\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + \pi U)_1, \\ (b) & U_{1^4} = \alpha U_{111} + \gamma U_{11} + \beta U_{1\varrho} + \delta U_1 + \varepsilon U.\end{array}}$$

Die Int. Bed.n berechnen wir wieder nach der Anweisung von Satz 31, wobei wir zweckmäßig für die Zwischenrechnungen die Abkürzung

$$(360)\qquad U_{1^4} = \tilde{\alpha} U_{111} + \tilde{\gamma} U_{11} + \tilde{\beta} U_{1\varrho} + \tilde{\delta} U_1 + \tilde{\varepsilon} U$$

einführen; außerdem gilt wieder (311), (311′). Wir erhalten nach einer kleinen Rechnung die Int. Bed.n

$$(361)\qquad \boxed{\begin{array}{ll}(a) & \alpha_{\varrho} = (\varrho_1 + \sigma)\alpha + 2(2\pi + 3(\varrho_{11} + 2\sigma_1)), \\ (b) & \alpha_{1\varrho} = 2(\varrho_1 + \sigma)\alpha_1 + (\varrho_{11} + 2\sigma_1)\alpha + 2(4\pi_1 + 3\varrho_{111} + 7\sigma_{11}), \\ (c) & \gamma_{\varrho} = 2(\varrho_1 + \sigma)\gamma - 3(\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\alpha + 2(6\pi_1 + 2\varrho_{111} + 3\sigma_{11}), \\ (d) & \left\{\begin{array}{l}\gamma_{1\varrho} = 3(\varrho_1 + \sigma)\gamma_1 + 2(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\gamma - 3(\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\alpha_1 \\ \qquad\qquad - 3(2\pi_1 + \varrho_{111} + 2\sigma_{11})\alpha + 18\pi_{11} + 4(\varrho_{1^4} + \sigma_{111}),\end{array}\right. \\ (e) & \delta + \beta_{\varrho} - 3(\varrho_1 + \sigma)\beta = 0, \\ (f) & \delta^*_{\varrho} = 3(\varrho_1 + \sigma)\delta^* - (2\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\gamma - (6\pi_1 + \varrho_{111})\alpha + 12\pi_{11} + \varrho_{1^4} - 4\sigma_{111}, \\ (f') & \delta^* = \delta + (\varrho_1 + 2\sigma)\beta, \\ (g) & \varepsilon + \delta_1 + \beta_{1\varrho} - 4(\varrho_1 + \sigma)\beta_1 - 3(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\beta = 0, \\ (h) & \varepsilon^*_{\varrho} = 4(\varrho_1 + \sigma)\varepsilon^* - \pi\delta^* + (\sigma_{11} - 2\pi_1)\gamma + (2\sigma_{111} - 3\pi_{11})\alpha + 4\pi_{111} - 3\sigma_{1^4}, \\ (h') & \varepsilon^* = \varepsilon + \pi\beta, \\ (i) & \left\{\begin{array}{l}\delta^*_{1\varrho} = 4(\varrho_1 + \sigma)\delta^*_1 + 3(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\delta^* - (2\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\gamma_1 - (4\pi_1 + \varrho_{111} + \sigma_{11})\gamma \\ \qquad\qquad - (6\pi_1 + \varrho_{111})\alpha_1 - (9\pi_{11} + \varrho_{1^4} - 2\sigma_{111})\alpha + 16\pi_{111} + \varrho_{1^4} - 7\sigma_{1^4}, \end{array}\right. \\ (j) & \left\{\begin{array}{l}\varepsilon^*_{1\varrho} = 5(\varrho_1 + \sigma)\varepsilon^*_1 + 4(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\varepsilon^* - \pi\delta^*_1 + (\sigma_{11} - 2\pi_1)(\delta^* + \gamma_1) \\ \qquad\qquad + (2\sigma_{111} - 3\pi_{11})(\gamma + \alpha_1) + (3\sigma_{1^4} - 4\pi_{111})\alpha + 5\pi_{1^4} - 4\sigma_{1^4}.\end{array}\right.\end{array}}$$

Die Relationen (361a—d, f, h—j) *sind die Int. Bed.n der Defgl.n* (363) (*s. unten*) *der Derivierten von* (359); vgl. die Bemerkung zu (313).

Eliminieren wir mittels (361 e, g) δ *und* ε *aus den übrigen Relationen* (361), *so sind die Relationen* (361 h, i) *vermöge der Identität* (189 b) *für* $f = \beta$ *miteinander äquivalent.*

Das System (279) sieht für $n = 4$ so aus:

$$(362)\qquad \boxed{\begin{array}{ll}(a) & U_{\varrho\varrho} = -\varrho_1 U_{\varrho} + \varrho_3 U, \quad U_{\varrho 1} = \tau U_{\varrho} + \sigma U_1 + (\sigma_1 - \sigma\tau)U, \\ (b) & U_{1\varrho 1} = (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_{11} + \varkappa U_{\varrho} + (\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\, U_1 + (\pi_1 - \sigma\varkappa)\, U, \\ (c) & U_{1^4} = \alpha U_{111} + \gamma U_{11} + \beta U_{1\varrho} + \vartheta U_{\varrho} + \delta U_1 + (\varepsilon - \sigma\vartheta)U.\end{array}}$$

Die Derivierte zu (362) und (359) wird definiert durch

$$(363)\qquad \boxed{\begin{array}{ll}(a) & U_{\varrho} = \sigma U, \quad U_{1\varrho} = (\varrho_1 + 2\sigma)\, U_1 + \pi U, \\ (b) & U_{1^4} = \alpha U_{111} + \gamma U_{11} + (\delta + (\varrho_1 + 2\sigma)\beta) U_1 + (\varepsilon + \pi\beta) U.\end{array}}$$

Auf Grund von Satz 32 berechnen wir zu (362) die Gr.-Bed.n, indem wir wieder die Abkürzung benützen

$$U_{1^s} = \tilde{\alpha} U_{111} + \tilde{\gamma} U_{11} + \tilde{\beta} U_{1\varrho} + \tilde{\vartheta} U_{\varrho} + \tilde{\delta} U_1 + (\tilde{\varepsilon} - \sigma\tilde{\vartheta}) U. \tag{364}$$

Wir finden dann die Relationen:

$$\boxed{\text{(a)}\quad \vartheta = 3\beta\tau + \beta_1, \qquad \text{(b)}\quad 4\varkappa + 2\tau^{[1]} + \alpha^{[1]} = 0,} \tag{365}$$

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad \gamma_1 + 2\tau\gamma - 3\varkappa\alpha + 6\varkappa^{[1]} - 2\tau^{[2]} = 0, \\ &\text{(b)}\quad \delta_1^* + 3\tau\delta^* - (2\varkappa - \tau^{[1]})\gamma - (3\varkappa^{[1]} - 2\tau^{[2]})\alpha + 4\varkappa^{[2]} - 3\tau^{[3]} = 0, \\ &\text{(c)}\quad \varepsilon_1^* + 4\tau\varepsilon^* - (\varkappa - \tau^{[1]})\delta^* - (\varkappa^{[1]} - \tau^{[2]})\gamma - (\varkappa^{[2]} - \tau^{[3]})\alpha + \varkappa^{[3]} - \tau^{[4]} = 0. \end{aligned} \tag{366}$$

Unter Benützung der Formel (289′) gelangen wir durch Elimination von $\varkappa$ aus (366 a, b) vermöge (365) zu den beiden Relationen

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(a)}\quad \tau^{[2]} \equiv \tau_{11} + 3\tau\tau_1 + \tau^3 = \psi\tau + \tfrac{1}{2}\psi_1, \qquad \text{(a′)}\quad \psi = \tfrac{1}{5}(2\gamma - 3\alpha_1 + \tfrac{3}{4}\alpha^2), \\ &\text{(b)}\quad 3\omega\tau + \omega_1 = 0, \qquad \text{(b′)}\quad \omega = \delta^* - \tfrac{5}{2}\psi_1 + \tfrac{1}{2}\alpha\gamma - \alpha_{11} + \tfrac{1}{8}\alpha^3. \end{aligned}} \tag{367}$$

Um die Gleichung (366 c) auszuwerten, bedienen wir uns außer der Formel (289′) noch der weiteren Formel

$$(af_1 + b\tau f)^{[s]} = \sum_{i=0}^{s+1} \left(\binom{s}{i} a + \binom{s}{i-1} b \right) 1^{[i]} f_{1^{s+1-i}} \qquad (s = 1, 2, \dots), \tag{368}$$

die sich aus $af_1 + b\tau f = (a - b) f_1 + b f^{[1]}$ und (289′) ohne weiteres ergibt. Wir erhalten dann aus (366 c) vermöge (365) und (367):

$$\begin{aligned} &\tfrac{3}{2}\omega\tau^{[1]} + (4\varepsilon^* + \tfrac{1}{4}\alpha\delta^* - 3\psi_{11} + \tfrac{15}{8}\alpha\psi_1 + \tfrac{1}{6}\psi(\psi + 5\gamma) + \tfrac{1}{2}\alpha_1\gamma - \alpha_{111} + \tfrac{3}{4}\alpha\alpha_{11})\tau \\ &\quad + \varepsilon_1^* + \tfrac{1}{4}\alpha_1\delta^* - \tfrac{3}{4}\psi_{111} + \tfrac{5}{8}\alpha\psi_{11} + \tfrac{1}{12}(\psi + 5\gamma)\psi_1 + \tfrac{1}{4}(\alpha_{11}\gamma - \alpha_{1^4} + \alpha\alpha_{111}) = 0. \end{aligned}$$

Addieren wir zu der vorstehenden Gleichung die beiden aus (367 b) resultierenden Gleichungen

$$-\tfrac{1}{2}(3\omega\tau + \omega_1)^{[1]} = 0, \qquad \tfrac{1}{4}\alpha(3\omega\tau + \omega_1) = 0,$$

so gelangen wir zu der einfachen Beziehung

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(a)}\quad 4\tilde{\omega}\tau + \tilde{\omega}_1 = 0, \\ &\text{(a′)}\quad \tilde{\omega} = \varepsilon^* - \tfrac{1}{2}\omega_1 + \tfrac{1}{4}\alpha\omega - \tfrac{3}{4}\psi_{11} + \tfrac{5}{8}\alpha\psi_1 + \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}\psi^2 + \gamma^2) \\ &\qquad\qquad - \tfrac{1}{4}(\alpha_{111} - \alpha\alpha_{11}) - \tfrac{1}{2^7}\alpha^4. \end{aligned}} \tag{369}$$

2. Gehen wir jetzt zur Diskussion der Relationen (365), (267), (276), (367), (369) im Sinne des Satzes 33 über! Wegen (365) kommt alles auf die Bestimmung von τ an, und zwar dienen dazu die Relationen (267), (367), (369); *die Relationen* (276) *sind nämlich eine Folge von* (365 b), (361 a, b), (267). Wenn $\omega = 0$ *und* $\tilde{\omega} = 0$, dann bleiben zur Bestimmung von τ nur die drei Diffgl.n (267) + (367 a), und diese sind dann nach Satz 20 auch tatsächlich wegen (226) und der vermöge (367 a′), (361) auch hier wieder geltenden Relationen (319) unbeschränkt integrabel, so daß sie ∞^2 Lösungen τ besitzen.

Verschwinden ω und $\tilde{\omega}$ nicht beide zugleich, dann liefern (367 b) und (369) durch Elimination von τ

$$\boxed{3\omega\tilde{\omega}_1 - 4\omega_1\tilde{\omega} = 0,} \tag{370}$$

und wir können τ eindeutig berechnen:

$$\tau = -\frac{\omega_1}{3\omega} = -\frac{\tilde{\omega}_1}{4\tilde{\omega}}. \tag{371}$$

Durch Einsetzen der Werte (371) in (267) und (367 a) ergeben sich dann neue Relationen für die Koeffizienten von (359); indessen sind die Bedingungen (267) + (371) bereits durch die folgenden aus (361) bzgl. (319) resultierenden Beziehungen erfüllt:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \omega_\varrho - 3(\varrho_1 + \sigma)\,\omega = 0, \quad \omega_{1\varrho} - 4(\varrho_1 + \sigma)\,\omega_1 - 3(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\omega = 0, \\ \text{(b)} & \tilde{\omega}_\varrho - 4(\varrho_1 + \sigma)\,\tilde{\omega} = 0, \quad \tilde{\omega}_{1\varrho} - 5(\varrho_1 + \sigma)\,\tilde{\omega}_1 - 4(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\,\tilde{\omega} = 0. \end{array} \tag{372}$$

Die Relationen (372) *sind den Relationen* (361 f, h—j) *gleichwertig*, und wenn δ, ε mittels (361 e, g) daraus eliminiert werden, wird eine der Relationen (372) überzählig, nämlich die zweite oder die dritte (s. die Bemerkung zu (361)).

Die direkte Bestätigung namentlich der Relationen (372 b) erfordert längere Rechnungen, und es ist daher zu begrüßen, daß (372) auch auf einem anderen Wege hergeleitet werden kann, wobei wir zugleich erkennen, daß die vier disjunktiven Fälle

$$\text{(a)}\ \ \omega \neq 0, \tilde{\omega} \neq 0, \qquad \text{(b)}\ \ \omega = 0, \tilde{\omega} \neq 0, \qquad \text{(c)}\ \ \omega \neq 0, \tilde{\omega} = 0, \qquad \text{(d)}\ \ \omega = 0, \tilde{\omega} = 0 \tag{373}$$

gegenüber B. T.n der Defgl.n (359) sich invariant verhalten. Wir transformieren (359) in

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = 0, \\ \text{(b)} & \mathfrak{U}_{\mathrm{I}\cdot} = \mathfrak{a}\mathfrak{U}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{c}\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{b}\mathfrak{U}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{d}\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{e}\mathfrak{U}, \end{array} \tag{374}$$

so daß nach (256) die Relationen bestehen

$$\begin{array}{l} \text{(a)}\ \mathfrak{a}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \text{(b)}\ \mathfrak{a}_{\mathrm{III}} = 0, \quad \text{(c)}\ \mathfrak{c}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \text{(d)}\ \mathfrak{c}_{\mathrm{III}} = 0, \quad \text{(e)}\ \mathfrak{d} + \mathfrak{b}_{\mathrm{II}} = 0, \\ \text{(f)}\ \mathfrak{d}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \text{(g)}\ \mathfrak{e} + \mathfrak{d}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{b}_{\mathrm{III}} = 0, \quad \text{(h)}\ \mathfrak{e}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \text{(i)}\ \mathfrak{d}_{\mathrm{III}} = 0, \quad \text{(j)}\ \mathfrak{e}_{\mathrm{III}} = 0. \end{array} \tag{375}$$

Unter Beachtung des Umstandes, daß die Derivierte (363) von (359) übergeht in die Derivierte

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathfrak{U}_{\mathrm{II}} = 0, \quad \mathfrak{U}_{\mathrm{III}} = 0, \\ \text{(b)} & \mathfrak{U}_{\mathrm{I}\cdot} = \mathfrak{a}\mathfrak{U}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{c}\mathfrak{U}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{d}\mathfrak{U}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{e}\mathfrak{U} \end{array} \tag{375*}$$

von (374), finden wir mit Hilfe der Formel (253) — da ja ϱ, σ, π Ausdrücke in den Op.n von X, P sind — die folgenden Trf.s-Formeln:

$$\begin{gathered} \alpha = X_1\mathfrak{a} + 2\frac{X_{11}}{X_1} - 4\frac{P_{\varrho 1}}{P_\varrho}, \qquad \gamma = X_1^2\mathfrak{c} + \mathfrak{L}(\mathfrak{a}), \\ \beta = \frac{X_1^3}{P_\varrho}\mathfrak{b} + \mathfrak{L}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}), \qquad \delta^* = \delta + (\varrho_1 + 2\sigma)\,\beta = X_1^3\mathfrak{d} + \mathfrak{L}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}), \\ \varepsilon^* = \varepsilon + \pi\beta = X_1^4\mathfrak{e} + X_1^3\left(\frac{P_{\varrho 1}}{P_\varrho} + \frac{X_{11}}{X_1}\right)\mathfrak{d} + \mathfrak{L}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}); \end{gathered} \tag{376}$$

dabei bedeutet $\mathfrak{L}$ eine lineare Abhängigkeit, in der die Op.n von X, P als Parameterfunktionen auftreten. Vermöge (214a), (222′), (241), (376) und (218) sind die Beziehungen (375) mit den Relationen (226), (244), (361) äquivalent.

Verschwinden ω und $\tilde{\omega}$ beide, dann müssen nach den Ausführungen zu Beginn dieser Ziffer auch die entsprechenden Größen bezüglich (374):

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \hat{\omega} = \mathfrak{d} - \frac{5}{2}\hat{\psi}_I + \frac{1}{2}\mathfrak{ac} + \frac{1}{8}\mathfrak{a}^3 - \mathfrak{a}_{II},\\
&(a') \quad \hat{\psi} = \frac{1}{5}\left(2\mathfrak{c} - 3\mathfrak{a}_I + \frac{3}{4}\mathfrak{a}^2\right),\\
&(b) \quad \tilde{\hat{\omega}} = \mathfrak{e} - \frac{1}{2}\hat{\omega}_I + \frac{1}{4}\mathfrak{a}\hat{\omega} - \frac{3}{4}\hat{\psi}_{II} + \frac{5}{8}\mathfrak{a}\hat{\psi}_I\\
&\qquad + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}^2 + \mathfrak{c}^2\right) - \frac{1}{4}(\mathfrak{a}_{III} - \mathfrak{a}\mathfrak{a}_{II}) - \frac{1}{2^7}\mathfrak{a}^4
\end{aligned}
\tag{377}
$$

verschwinden. Bezeichnen wir mit $[\omega], [\tilde{\omega}]$ die Ausdrücke, welche aus $\omega, \tilde{\omega}$ vermöge (214a), (222′), (241), (376) nach Reduktion mittels (375) hervorgehen, wobei (375e, g) nach $\mathfrak{b}_{II}, \mathfrak{b}_{III}$ aufgelöst werden sollen, dann müssen die Gleichungen $[\omega] = 0, [\tilde{\omega}] = 0$ vermöge (165) oder (218) mit den Gleichungen $\hat{\omega} = 0, \tilde{\hat{\omega}} = 0$ äquivalent sein. Daraus werden wir jetzt schließen, daß

$$(378) \qquad (a) \quad \omega = X_1^3\hat{\omega}, \qquad (b) \quad \tilde{\omega} = X_1^4\tilde{\hat{\omega}}.$$

Denn zunächst liefert (367b′), (377a) mit Hilfe von (215)

$$(379) \qquad [\omega] = X_1^3\hat{\omega} + \mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_I, \mathfrak{a}_{II}, \mathfrak{c}, \mathfrak{c}_I);$$

$\mathfrak{F}$ enthält noch die Op.n von X, P. Nun muß der Ausdruck (379) vermöge $\hat{\omega} = 0$, $\tilde{\hat{\omega}} = 0$ verschwinden, und da die Argumente von $\mathfrak{F}$ vermöge (375) und $\hat{\omega} = 0, \tilde{\hat{\omega}} = 0$ noch willkürlich bleiben, muß $\mathfrak{F} \equiv 0$ sein auf Grund von (218); damit ist (378a) bewiesen. Ferner finden wir mittels (215) aus (369a′) mit Rücksicht auf (378a), (377a, b) und $\hat{\omega}_{II} = 0$

$$(380) \qquad [\tilde{\omega}] = X_1^4\tilde{\hat{\omega}} + \mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_I, \mathfrak{a}_{II}, \mathfrak{a}_{III}, \mathfrak{c}, \mathfrak{c}_I, \mathfrak{c}_{II}).$$

Ganz entsprechend wie aus (379) auf (378a) schließen wir jetzt aus (380) auf (378b).

In den Formeln (378) *liegt augenscheinlich die Invarianz der Fälle* (373) *beschlossen.*

Da ferner vermöge (375)

$$(381) \qquad (a) \quad \hat{\omega}_{II} = 0, \quad \hat{\omega}_{III} = 0, \qquad (b) \quad \tilde{\hat{\omega}}_{II} = 0, \quad \tilde{\hat{\omega}}_{III} = 0,$$

so gelangen wir von (381) vermöge (378) auf einfache Weise zu den Relationen (372); es gilt nämlich der allgemeine Satz:

Satz 38. *Besteht vermöge der B. T.* (161) *zwischen den Größen* $\Theta(x, y, y')$ *und* $\widehat{\Theta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ *ein Zusammenhang*

$$(382) \qquad \Theta = X_1^s\widehat{\Theta} + \mathfrak{F} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

unter $\mathfrak{F}$ *gemeinhin einen Ausdruck in den Op.n von* X, P *verstanden, so verwandeln sich die Diffgl.n*

$$(383) \qquad \widehat{\Theta}_{II} = 0, \quad \widehat{\Theta}_{III} = 0$$

auf Grund von (382) *in die folgenden*

$$(383') \quad \Theta_\varrho = s(\varrho_1 + \sigma)\Theta + \mathfrak{F}, \quad \Theta_{1\varrho} = (s+1)(\varrho_1 + \sigma)\Theta_1 + s(\varrho_{11} + 2\sigma_1)\Theta + \mathfrak{F}.$$

Der einfache Beweis dieses Satzes fließt aus (215), (222′), (242). Beiläufig möge noch erwähnt werden, daß die ähnliche Struktur der Formeln (267), (271), (276), (313a, b), (319), (321), (361a, b) ebenfalls in Satz 38 ihren Ursprung hat.

Schließlich ergibt sich noch, daß allgemein die Diffgl.n (267) *durch den Ausdruck*

$$\tau = -\frac{\Theta_1}{s\Theta} \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{384}$$

befriedigt werden, wenn Θ *den Diffgl.n* (383′) *bei verschwindenden Größen* $\mathfrak{F}$ *genügt.*

Formulieren wir unsere Ergebnisse:

Theorem 6. *Die allgemeinste* $\mathcal{G}_{4+1}$ *wird durch die Defgl.n* (359) *mit den Relationen* (226), (244), (361) *charakterisiert; von den Relationen* (361h, i) *ist eine überzählig, wenn* δ, ε *vermöge* (361e, g) *eliminiert werden; ferner lassen sich die Relationen* (361f, h—j) *durch* (372) *ersetzen. Es sind die vier Fälle* (373) *zu unterscheiden, die sich gegenüber B. T.n der Gruppe* (359) *invariant verhalten. In den Fällen* (373a—c) *definiert* (359) *dann und nur dann eine* $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{4+1}$, *wenn noch die Bedingungen* (370), (367a) + (371) *erfüllt sind, während im Falle* (373d) *und nur dann eine* $\mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{4+1}$ *durch* (359) *definiert wird.*

3. Nun stellen wir die zu (359) gehörige $\mathcal{D}_4$ auf. Die Formel (300) liefert

$$\Delta_{4)} = \mathsf{H}'''_{3)}(y^{(\varrho)}\mathsf{H}^{(4)} - y''\mathsf{H}^{(4)}_{2)}) + \mathsf{H}^{(4)}_{3)}(y''\mathsf{H}'''_{2)} - y^{(\varrho)}\mathsf{H}'''). \tag{385}$$

Aus (322) und (173′) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathsf{H}'''_{3)} = -\,y^{(\varrho)3}, \quad y''\mathsf{H}'''_{2)} - y^{(\varrho)}\mathsf{H}''' = y^{(\varrho)}(y''' - \varrho_\varrho y''^3 - 3(\varrho_1 + \sigma)\,y^{(\varrho)}y''^2),\\
&\mathsf{H}^{(4)}_{3)} = -\,y^{(\varrho)2}(6\varrho y''' + 6\varrho_\varrho y''^2 + (12\varrho_1 + 10\sigma)\,y^{(\varrho)}y'' + \alpha y^{(\varrho)2}),\\
&y^{(\varrho)}\mathsf{H}^{(4)} - y''\mathsf{H}^{(4)}_{2)} = y^{(\varrho)}\frac{d\mathsf{H}'''}{dx} - y''\frac{d\mathsf{H}'''_{2)}}{dx} - (2\varrho_1 + 3\sigma)\,y''^2\mathsf{H}'''_{2)}\\
&\qquad\qquad + y^{(\varrho)3}(3(\pi + \varrho_{11} + 2\sigma_1)\,y''^2 + \gamma y^{(\varrho)}y'' - \beta y^{(\varrho)2}).
\end{aligned} \tag{386}$$

Nach einer kleinen Rechnung finden wir aus (385), (386) nach Abspaltung des Faktors $y^{(\varrho)3}$ die gesuchte $\mathcal{D}_4$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{4)} = {}& (1 + \varrho y'')\,y^{(4)} - 3\varrho y'''^2 - (6\varrho_\varrho y''^2 + 2(6\varrho_1 + 5\sigma)\,y^{(\varrho)}y'' + \alpha y^{(\varrho)2})\,y'''\\
&+ 3\varrho_\varrho^2 y''^5 + (2\varrho_\varrho(6\varrho_1 + 5\sigma) - \varrho_{\varrho\varrho})\,y^{(\varrho)}y''^4\\
&+ (\varrho_\varrho\alpha + 3(5(\varrho_1 + \sigma)^2 + \varrho_1^2) + 2(\varrho_{\varrho 1} - 3\varrho_{1\varrho}))\,y^{(\varrho)2}y''^3\\
&+ 3((\varrho_1 + \sigma)\alpha - \pi - 2\varrho_{11} - 3\sigma_1)\,y^{(\varrho)3}y''^2 - \gamma y^{(\varrho)4}y'' + \beta y^{(\varrho)5} = 0.
\end{aligned} \tag{387}$$

Diese Form der $\mathcal{D}_4$ ist *eindeutig* (s. die Bemerkung zu (150)). Die Größen ϱ, σ, α, π, γ, β lassen sich durch die Koeffizienten der Diffgl. (387) ausdrücken, so daß in Berücksichtigung von (361e, g) das System Defgl.n (359) der einzigen von (387) gestatteten $\mathcal{G}_{4+1}$ (Satz 24) eindeutig bestimmt ist. Die Größen ϱ, σ, π, α, γ, β haben dann noch den Relationen (226), (244), (361a—e, g), (372) zu genügen, unter Umständen noch den Relationen (370) und (367a)+(371) oder (373d).

Die Diffgl. (387) wird unbrauchbar, wenn $\varrho = \infty$. Um zu einer brauchbaren Form zu kommen, müssen wir dann nach dem Rezept des Satzes 35 die Diffgl. (387) umgestalten und dabei gleichzeitig den Grenzübergang $\bar{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \to 0$ vornehmen. Dann kommt nach Multiplikation mit $-\,y''^5$ als spezielle Form der $\mathcal{D}_4$ für $\varrho = \infty$:

$$y''y^{(4)} - 3y'''^2 - (\bar{\alpha}y'' + 10\bar{\sigma})\,y''y''' - \beta y''^5 + \bar{\gamma}y''^4 + 3(\bar{\pi} + 3\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}\bar{\alpha})\,y''^3 - 15\bar{\sigma}^2y''^2 = 0. \tag{388}$$

Bezüglich der Diffgl. (388) haben wir dann die Relationen (s. Bemerkung zu Satz 35):

$$\text{(a)}\quad \bar{\sigma}_1 = -\,\bar{\sigma}^2, \qquad \text{(b)}\quad \bar{\pi}_1 = -\,\bar{\sigma}\bar{\pi} + 2\bar{\sigma}_{21} - \bar{\sigma}_{12}, \tag{389}$$

(390)
$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \bar{\alpha}_1 = \bar{\sigma}\bar{\alpha} + 4(\bar{\pi} + 3\bar{\sigma}_2),\\
&\text{(b)}\quad \bar{\alpha}_{21} = 2\bar{\sigma}\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\sigma}_2\bar{\alpha} + 2(4\bar{\pi}_2 + 7\bar{\sigma}_{22}),\\
&\text{(c)}\quad \bar{\gamma}_1 = 2\bar{\sigma}\bar{\gamma} - 3(\bar{\pi} + 2\bar{\sigma}_2)\bar{\alpha} + 6(2\bar{\pi}_2 + \bar{\sigma}_{22}),\\
&\text{(d)}\quad \bar{\gamma}_{21} = 3\bar{\sigma}\bar{\gamma}_2 + 4\bar{\sigma}_2\bar{\gamma} - 3(\bar{\pi} + 2\bar{\sigma}_2)\bar{\alpha}_2 - 6(\bar{\pi}_2 + \bar{\sigma}_{22})\bar{\alpha} + 2(9\bar{\pi}_{22} + 2\bar{\sigma}_{222}),\\
&\text{(e)}\quad \bar{\delta} + \bar{\beta}_1 - 3\bar{\sigma}\bar{\beta} = 0, \qquad \text{(f)}\quad \bar{\varepsilon} + \bar{\delta}_2 + \bar{\beta}_{21} - 4\bar{\sigma}\bar{\beta}_2 - 6\bar{\sigma}_2\bar{\beta} = 0,\\
&\text{(g)}\quad \bar{\omega}_1 - 3\bar{\sigma}\bar{\omega} = 0, \quad \bar{\omega}_{21} - 4\bar{\sigma}\bar{\omega}_2 - 6\bar{\sigma}_2\bar{\omega} = 0,\\
&\text{(h)}\quad \bar{\bar{\omega}}_1 - 4\bar{\sigma}\bar{\bar{\omega}} = 0, \quad \bar{\bar{\omega}}_{21} - 5\bar{\sigma}\bar{\bar{\omega}}_2 - 8\bar{\sigma}_2\bar{\bar{\omega}} = 0,
\end{aligned}$$

(391)
$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \bar{\omega} = \bar{\delta} + 2\bar{\sigma}\bar{\beta} - \tfrac{5}{2}\bar{\psi}_2 + \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}\bar{\gamma} + \tfrac{1}{8}\bar{\alpha}^3 - \bar{\alpha}_{22},\\
&\text{(a')}\quad \bar{\psi} = \tfrac{1}{5}(2\bar{\gamma} - 3\bar{\alpha}_2 + \tfrac{3}{4}\bar{\alpha}^2),\\
&\text{(b)}\quad \bar{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon} + \bar{\pi}\bar{\beta} - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_2 + \tfrac{1}{4}\bar{\alpha}\bar{\omega} - \tfrac{3}{4}\bar{\psi}_{22} + \tfrac{5}{8}\bar{\alpha}\bar{\psi}_2\\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}\bar{\psi}^2 + \bar{\gamma}^2) - \tfrac{1}{4}(\bar{\alpha}_{222} - \bar{\alpha}\bar{\alpha}_{22}) - \tfrac{1}{27}\bar{\alpha}^4,
\end{aligned}$$

(392)
$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad 3\bar{\omega}\bar{\bar{\omega}}_2 - 4\bar{\omega}_2\bar{\bar{\omega}} = 0,\\
&\text{(b)}\quad \bar{\tau}_{22} + 3\bar{\tau}\bar{\tau}_2 + \bar{\tau}^3 = \bar{\psi}\bar{\tau} + \tfrac{1}{2}\bar{\psi}_2, \qquad \text{(b')}\quad \bar{\tau} = -\frac{\bar{\omega}_2}{3\bar{\omega}} = -\frac{\bar{\bar{\omega}}_2}{4\bar{\bar{\omega}}}.
\end{aligned}$$

Dabei sind wieder die vier Fälle zu beachten

(393) (a) $\bar{\omega} \neq 0,\ \bar{\bar{\omega}} \neq 0$, (b) $\bar{\omega} = 0,\ \bar{\bar{\omega}} \neq 0$, (c) $\bar{\omega} \neq 0,\ \bar{\bar{\omega}} = 0$, (d) $\bar{\omega} = 0,\ \bar{\bar{\omega}} = 0$.

Das Theorem 6 gestattet uns nunmehr, das folgende Theorem auszusprechen:

Theorem 7. *Die allgemeinste gewöhnliche Diffgl. 4. O., die durch B. T. lineare homogene Form annehmen kann, ist die Diffgl.* (387) *mit den Relationen* (226), (244), (361a—e, g), (372), *welche durch den Grenzübergang* $\varrho \to \infty$ *in die Diffgl.* (388) *mit den Relationen* (389) — (391) *übergeht. Bezüglich der Diffgl.* (387) *sind die vier gegenüber B. T.n dieser Diffgl. invarianten Fälle* (373) *zu unterscheiden; eine B. T., die die Diffgl.* (387) *in die Form* (388) *bringt, führt die Fälle* (373) *in die entsprechenden Fälle* (393) *über. Dann und nur dann, wenn* (373d) bzgl. (393d) *zutrifft, läßt sich die Diffgl.* (387) *bzgl.* (388) *in* $y''' = 0$ *transformieren; in den Fällen* (373a—c) *bzgl.* (393a—c) *kann die Diffgl.* (387) *bzgl.* (388) *dann und nur dann in lineare homogene Form mit konstanten Koeffizienten verwandelt werden, wenn noch die Relationen* (370), (367a) + (371) *bzgl.* (392) *bestehen.*

Anhang.

Man wird bei Betrachtung der im vorstehenden entwickelten Gleichungen und Formeln ohne weiteres den Eindruck gewinnen, daß ihnen gewisse Homogenitätseigenschaften anhaften müssen. Das trifft auch in der Tat zu und soll jetzt explizit dargestellt werden.

1. Wir beginnen mit den Relationen des ersten Abschnittes, d. h. wir beschäftigen uns zunächst mit den P. T.n, wobei wir es nur mit den zwei Veränderlichen x, y zu tun haben. Diesen Variablen x, y legen wir die *geordneten Doppel-Gewichte* (D.G.e) $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$ bei und schreiben

(I) $$\langle x\rangle = \langle 1, 1\rangle, \quad \langle y\rangle = \langle 1, 2\rangle.$$

Dem Produkt $x^i y^j$ geben wir das D. G.

(II) $$\langle x^i y^j \rangle = \langle i + j, i + 2j \rangle.$$

Liegt eine Potenzreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j$ vor, dann können wir ihr als Ganzem ein beliebiges D. G., etwa $\langle 0, 0 \rangle$, zuschreiben, wenn wir für die a_{ij} die *negativen* D. G.e

$$\langle a_{ij} \rangle = \langle - i - j, - i - 2j \rangle$$

einführen und allgemein folgende Festsetzungen treffen:

(III) $$\langle i, j \rangle \pm \langle k, l \rangle = \langle i \pm k, j \pm l \rangle; \quad \langle uv \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle, \quad \left\langle \frac{u}{v} \right\rangle = \langle u \rangle - \langle v \rangle.$$

Numerischen Größen, also z. B. der Zahl 1, geben wir immer das Gewicht $\langle 0, 0 \rangle$, während wir die Zuteilung anderer Gewichte $\langle i, j \rangle$ ausschließlich den rechnerischen *Symbolen* wie x, y, a_{ij} usw. vorbehalten.

In Übertragung einer algebraischen Redewendung nennen wir eine *Summe* $u + v + w + \cdots$ *isobar*, wenn $\langle u \rangle = \langle v \rangle = \langle w \rangle = \cdots$. Einen Quotienten

$$\frac{u + v + w + \cdots}{u' + v' + w' + \cdots}$$

nennen wir isobar, wenn Zähler und Nenner *für sich* isobar sind. Einen Ausdruck $x^2 + y^3$ z. B. machen wir, wenn nötig, isobar durch Einführung *idealer Faktoren* e_{ij} mit dem numerischen Wert 1 und dem D. G. $\langle \mathrm{e}_{ij} \rangle = \langle i, j \rangle$. Dann können wir schreiben

$$x^2 + y^3 = \mathrm{e}_{14} x^2 + y^3,$$

und analog in anderen Fällen.

Ferner legen wir den *Operationen* $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ sowie $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dy}$ die D.G.e von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$, also $\langle - 1, - 1 \rangle$ und $\langle - 1, - 2 \rangle$ bei und setzen folgerichtig

(IV) $$\left\langle \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \, \partial y^j} \right\rangle = \langle - i - j, - i - 2j \rangle.$$

Weiter ist dann

(IV′) $$\langle y' \rangle = \langle 0, 1 \rangle, \quad \langle y^{(i)} \rangle = \langle - (i - 1), \; - (i - 2) \rangle.$$

Welche D. G.e geben wir den Größen ξ, η einer inf. Trf. $Xf = \xi p + \eta q$? Am nächsten liegt es, $\langle Xf \rangle = \langle f \rangle$ zu wählen, da $Xf = \frac{\delta f}{\delta t}$ und es am einfachsten erscheint, $\langle t \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ zu nehmen; dann folgt

(V) $$\langle \xi \rangle = \langle 1, 1 \rangle, \quad \langle \eta \rangle = \langle 1, 2 \rangle.$$

Den Größen X, Y einer P. T.

$$\mathfrak{x} = X(x, y), \quad \mathfrak{y} = Y(x, y)$$

und damit auch den $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ geben wir die D. G.e der Variablen x, y selber; dazu bewegt uns die Rücksicht auf die *identische* Trf. Bei der Trf. $\mathfrak{x} = \frac{1}{x}$, $\mathfrak{y} = \frac{1}{y}$ z. B. müssen wir dann $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ mit den idealen Faktoren $\mathrm{e}_{22}, \mathrm{e}_{24}$ multiplizieren.

Der Nutzen all dieser Festsetzungen liegt in dem an sich selbstverständlichen Satze:

Satz I. *Ist ein System von isobaren Relationen*

$$R_i(u, v, w, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

für die Größen $u, v, w, \ldots$ und ihre Ableitungen vorgelegt, dann sind die Relationen, die wir aus ihm durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie durch die Operationen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ herleiten können, wieder isobar, vorausgesetzt daß nur solche Größen zueinander addiert werden, welche gleiches D. G. besitzen.

Eine Relation $R(u, v, w, \ldots) = 0$ nennen wir dabei isobar, wenn die Funktion R isobar ist. Setzen wir etwa fest, daß die linken Seiten der Formel (37) in § 2 alle das D. G. $\langle 0, 0\rangle$ haben sollen, dann wird, wenn $\zeta^{(1)} = \xi$, $\zeta^{(2)} = \eta$ usw.: $\langle \alpha_{i1}\rangle = \langle -1, -1\rangle$, $\langle \alpha_{i2}\rangle = \langle -1, -2\rangle$ usw., *und die Relationen* (42) *müssen demgemäß nach Satz* I *isobar sein.*

Man sieht leicht, wie sich die von uns vorgenommenen Gewichtsdefinitionen auf Grund von Satz I als *Prüfstein* für die Richtigkeit der Rechnungen verwenden lassen.

2. Nunmehr wollen wir die Gewichtsdefinitionen auch für die B. T.n mit ihren drei Variablen x, y, y' angeben. Dabei können wir uns kurz fassen, da sich alles in engster Analogie zu den vorangehenden Betrachtungen vollzieht, wenn natürlich auch andere D. G.s-Definitionen wie bezüglich der P. T.n erforderlich werden. Wir setzen nämlich jetzt, und zwar mit Rücksicht auf den Pfaffschen Ausdruck $dy - y'dx$:

$$\text{(VI)} \qquad \langle x\rangle = \langle 1, 1\rangle, \quad \langle y'\rangle = \langle 1, 2\rangle, \quad \langle y\rangle = \langle 2, 3\rangle.$$

Selbstverständlich behalten wir wieder die Formeln (III) bei, ebenso auch die Möglichkeit, durch Einführung idealer Faktoren irgendwelche Ausdrücke $u + v + w + \cdots$ *isobar* zu machen. Für die Op.n $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ bekommen wir nach (156) die D. G.e (man beachte, daß $f_1 = f_x + y'f_y$ isobar ist):

$$\text{(VII)} \qquad \begin{gathered} \langle \partial_2\rangle = \left\langle \frac{1}{y'} \right\rangle = \langle -1, -2\rangle, \ \langle \partial_3\rangle = \left\langle \frac{1}{y} \right\rangle = \langle -2, -3\rangle, \\ \langle \partial_1\rangle = \left\langle \frac{1}{x} \right\rangle = \langle -1, -1\rangle, \end{gathered}$$

was mit der Beziehung $\partial_3 = \partial_{12} - \partial_{21}$ im Einklang ist.

Ist Xf eine inf. B. T. der Ebene und setzen wir wieder fest, daß $\langle Xf\rangle = \langle f\rangle$ sein soll, dann muß nach (166) und (166′) gelten

$$\text{(VIII)} \qquad \langle \xi\rangle = \langle x\rangle, \ \langle \eta\rangle = \langle y\rangle, \ \langle \eta'\rangle = \langle y'\rangle; \quad \langle U\rangle = \langle y\rangle = \langle 2, 3\rangle.$$

Auch bezüglich der B. T.

$$\mathfrak{x} = X(x, y, y'), \quad \mathfrak{y} = Y(x, y, y'), \quad \mathfrak{y}' = P(x, y, y')$$

geben wir den $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ wieder die nämlichen D. G.e wie den x, y, y', d. h. wir wählen

$$\text{(IX)} \qquad \langle X\rangle = \langle x\rangle, \langle Y\rangle = \langle y\rangle, \langle P\rangle = \langle y'\rangle.$$

Dann wird $\langle \Delta\rangle = \langle 0, 0\rangle$, im Einklang z. B. mit (179). Der Satz I erleidet nur eine geringfügige Abänderung:

Satz II. *Aus einem System isobarer Relationen*

$$R_i(u, v, w, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

für die Größen $u, v, w, \ldots$ und ihre Op.n gehen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie durch Ausführung der Op.n $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ und $\frac{d}{dx}$ wieder isobare Relationen hervor, wenn immer nur Größen von gleichem D. G. zueinander addiert werden.

Literatur.

1. In seiner Abhandlung: Über die Integration einer Kategorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen 3. O., Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1897, hat Żorawski die gewöhnlichen Diffgl.n 3. O., die durch Punkt-Trf.n in $y''' = 0$ übergeführt werden können, auf direktem Wege charakterisiert und ist zu den gleichen Ergebnissen wie in Theorem 2 der vorliegenden Arbeit gelangt.

2. Dasselbe Problem hat später Leja auf wieder anderem Wege gelöst in der Abhandlung: Invarianten gewöhnlicher Differentialgleichungen in bezug auf Punkt-Transformationen, Monatshefte für Mathematik und Physik **29** (1918), S. 204ff. In einer anderen Arbeit: Invariante Eigenschaften von Differentialgleichungen 3. O. gegenüber Berührungstransformationen, Prace matematyczno-fizyczne **29** (1918), S. 180ff. sind von Leja die folgenden Bedingungen dafür aufgestellt worden, daß die Diffgl. 3. O.

$$y''' = \omega(x, y, y', y'')$$

die Form $y''' = 0$ vermittels Berührungs-Trf.n erhalten kann:

$$\text{(A)} \qquad \text{(I)} \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial y''^4} = 0, \qquad \text{(II)} \quad \frac{d\psi}{dx} - \frac{2}{3}\,\omega_{y''}\,\psi + 6\omega_y = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \psi = \frac{d\omega_{y''}}{dx} - 3\omega_{y'} - \frac{2}{3}\,\omega_{y''}^2 .$$

Ausrechnung dieser Bedingungen liefert wieder die Relationen (334) unseres Theorems 5.

3. Die vorstehenden Bedingungen (A) hat K. Wünschmann schon 1905, allerdings ohne Beweis, in seiner Dissertation: Über Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen (Greifswald 1905) angegeben.

4. Einen Beweis für den genannten Satz von Wünschmann hat dann — sogar in etwas verallgemeinerter Fassung — W. Herbst geliefert in seiner Dissertation: Mongesche Gleichungen 2. Grades als Schnittbedingungen von Kurvenscharen (Greifswald 1912).

5. Wiederum auf andere Weise hat Karl Faber die Relationen (334) der vorliegenden Arbeit aufgestellt in seiner Abhandlung: Differentialgleichungen, die durch eine Berührungstransformation auf die Form $y''' = 0$ gebracht werden können, Berichte der mathematisch-physischen Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig **78** (1926).

6. Die vorliegende Arbeit selber stellt eine Fortführung und Umarbeitung der Dissertation des Verfassers dar: Über gewöhnliche Differentialgleichungen, die lineare homogene Form erhalten können (Gießen 1929).

Eingegangen 22. August 1936.

Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzgruppen eines algebraischen Körpers für alle Potenzen eines Primteilers als Modul.

Von *Kurt Hensel* in Marburg a. L.

I. Einleitung. Allgemeine Sätze aus der Theorie der endlichen abelschen Gruppen.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit den Kongruenzgruppen in einem algebraischen Körper für eine beliebige Primzahlpotenz als Modul. Für einen jeden solchen Modul bilden alle ganzen Zahlen oder, was fast auf das Gleiche herauskommt, alle Einseinheiten dieses Körpers eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_0$, und es handelt sich hier also um die Bestimmung derselben und um die Aufsuchung des Zusammenhanges zwischen diesen Gruppen für andere und andere Potenzen dieses Primdivisors als Modul.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, will ich in einem kurzen Anfangsabschnitt die hier wesentlichen Ergebnisse der Theorie der endlichen abelschen Gruppen in der Form aussprechen, in welcher sie nachher gebraucht werden.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl p ist, und es seien

$$p^{t_1}, p^{t_2}, \ldots, p^{t_r}$$

mit den Vielfachheiten

$$s_1, \; s_2, \; \ldots, s_r$$

ihre *verschiedenen*, absteigend geordneten Primzahlpotenzinvarianten. Für jeden positiven Exponenten t bezeichne $\mathfrak{G}_t$ die Untergruppe aller Elemente X aus $\mathfrak{G}$ mit $X^{p^t} = 1$, also die Untergruppe aller p^t-ten Einheitswurzeln aus $\mathfrak{G}$, und p^{n_t} ihre Ordnung. Die Differenz

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(p^t) = p^{n_t} - p^{n_t - 1}$$

ist dann die Anzahl aller Elemente der genauen Ordnung p^t, d. h. die Anzahl aller primitiven p^t-ten Einheitswurzeln aus $\mathfrak{G}$. Offenbar ist diese Anzahl eine gewisse Verallgemeinerung der Eulerschen φ-Funktion aus der elementaren Zahlentheorie.

Aus dem Basissatze für endliche abelsche Gruppen ergibt sich für die Exponenten n_t dieser Gruppen $\mathfrak{G}_t$ unmittelbar die Bestimmung:

$$n_t = (s_1 + s_2 + \cdots + s_\tau)\, t + s_{\tau+1} t_{\tau+1} + \cdots + s_r t_r,$$

wo der Index τ bestimmt ist durch:

$$t_\tau \geqq t > t_{\tau+1} \quad \text{oder auch nur} \quad t_\tau \geqq t \geqq t_{\tau+1}.$$

Daraus ergeben sich weiter leicht die folgenden Tatsachen:

Zu der Exponentenreihe n_t der Ordnungen aller Gruppen $\mathfrak{G}_t$

$$\ldots, n_{t_1+1} \,|\, n_{t_1}, \ldots, n_{t_2+1} \,|\, n_{t_2}, \ldots, n_{t_3+1} \,|\, \ldots \,|\, n_{t_r}, \ldots, n_1 \,|\, n_0 = 1$$

gehört als erste Differenzenreihe $n_t - n_{t-1}$, *also als Exponentenreihe der Ordnungen der Faktorgruppen* $\mathfrak{G}_t/\mathfrak{G}_{t-1}$:

$$\ldots, 0 | \underbrace{s_1, \ldots, s_1}_{(t_1-t_2)\text{-mal}} | \underbrace{s_1+s_2, \ldots, s_1+s_2}_{(t_2-t_3)\text{-mal}} | \ldots | \underbrace{s_1+s_2+\cdots+s_r, \ldots, s_1+s_2+\cdots+s_r}_{t_r\text{-mal}} |$$

und als zweite Differenzenreihe $n_t - 2n_{t-1} + n_{t-2}$:

$$\ldots, 0 | \underbrace{-s_1, 0, \ldots, 0}_{(t_1-t_2)\text{-mal}} | \underbrace{-s_2, 0, \ldots, 0}_{(t_2-t_3)\text{-mal}} | \cdots | \underbrace{-s_r, 0, \ldots, 0}_{t_r\text{-mal}} | .$$

Die Ordnungen p^{n_t} *selbst*:

$$\ldots, p^{n_{t_1}+1} | p^{n_{t_1}}, \ldots, p^{n_{t_2}+1} | p^{n_{t_2}}, \ldots, p^{n_{t_3}+1} | \ldots | p^{n_{t_r}}, \ldots, p^{n_1} | 1$$

besitzen als erste Differenzenreihe die oben definierten Anzahlen $\varphi_{\mathfrak{G}}(p^t)$ *aller primitiven* p^t*-ten Einheitswurzeln aus* $\mathfrak{G}$:

$$\ldots, \varphi_{\mathfrak{G}}(p^{t_1+1}) | \varphi_{\mathfrak{G}}(p^{t_1}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{G}}(p^{t_2+1}) | \varphi_{\mathfrak{G}}(p^{t_2}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{G}}(p^{t_3+1}) | \ldots | \varphi_{\mathfrak{G}}(p^{t_r}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{G}}(p) | .$$

II. Die unendliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_0$ aller π-adischen algebraischen Einseinheiten und ihre Beziehung zu allen endlichen Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_s$ dieser Einseinheiten modulo einer Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^s$.

Es sei nun K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primteiler in K, der zur rationalen Primzahl p gehört, e seine Ordnung und f sein Grad.

Ich betrachte den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen perfekten Erweiterungskörper $K(\mathfrak{p})$ von K und darin die multiplikative unendliche Gruppe $\mathfrak{G}_0$ aller Einseinheiten

$$\eta = 1 + \gamma_1\pi + \gamma_2\pi^2 + \cdots,$$

wo π eine beliebige Primzahl zu $\mathfrak{p}$, d. h. eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl aus $K(\mathfrak{p})$ ist, und die Koeffizienten γ_i beliebige ganze Zahlen aus $K(\mathfrak{p})$ sind.

Diese Gruppe $\mathfrak{G}_0$ habe ich bereits in zwei früheren Arbeiten untersucht [1]). Das Hauptergebnis war: $\mathfrak{G}_0$ ist von *endlichem Rang* in bezug auf den Exponentenbereich der ganzen p-adischen Zahlen, und zwar ist dieser Rang, d. h. die Anzahl der unabhängigen Basiselemente von unendlicher Ordnung gleich dem Grade $\lambda = ef$ des Körpers $K(\mathfrak{p})$ in bezug auf den Körper der p-adischen Zahlen.

Hier soll nur der „allgemeine Fall" betrachtet werden, wo $K(\mathfrak{p})$ keine primitive p-te Einheitswurzel enthält. Dann (und nur dann) erwies sich die Gruppe $\mathfrak{G}_0$ als die *reine* unendliche abelsche Gruppe vom Range $\lambda = ef$, d. h. es existiert eine Basis von λ Einseinheiten η_i derart, daß jede Einseinheit η aus $K(\mathfrak{p})$ eindeutig in der Form

$$\eta = \eta_1^{c_1}\, \eta_2^{c_2} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

mit ganzen p-adischen Exponenten c_i darstellbar ist.

Ein System von Basiseinheiten (η_i) bestimmt sich folgendermaßen: Ausgehend von dem rationalen Bruch

$$r_0 = \frac{e}{p-1},$$

der die *Fundamentalinvariante* der rationalen Primzahl p in bezug auf den zu untersuchenden Körper $K(\mathfrak{p})$ genannt werden soll, betrachte man das Intervall

$$1 \leqq k \leqq r_0 + e = r_0 p .$$

---

[1]) K. Hensel, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, ds. Journ. **146** (1916), S. 189—215. K. Hensel, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul, ds. Journ. **146** (1916), S. 216—228.

Es enthält genau $[r_0 + e] - [r_0] = e$ ganze zu p prime Zahlen

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_e.$$

Ist ferner $w_1, \ldots, w_f$ irgendeine additive Basis mod $\mathfrak{p}$ für die ganzen Zahlen aus $K(\mathfrak{p})$, so bilden die $\lambda = ef$ Einseinheiten

$$1 + w_i\pi^{k_1} + \cdots, \quad 1 + w_i\pi^{k_2} + \cdots, \ldots, \quad 1 + w_i\pi^{k_e} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

der Grade $k_1, k_2, \ldots, k_e$ eine Basis $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda$ der oben angegebenen Art für alle Einseinheiten η aus $K(\mathfrak{p})$.

Ich betrachte nun diese Einseinheiten η nur für irgendeine gegebene Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^s$ als Modul, deren Exponent s eine positive ganze Zahl oder auch eine positive gebrochene Zahl $\frac{s_0}{p^\varrho}$ mit einer Potenz von p als Nenner sein kann. Dann bilden sie jetzt eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_s$, und zwar bilden in dem hier allein betrachteten allgemeinen Falle die oben angegebenen λ Basiseinseinheiten $\eta_1, \ldots, \eta_\lambda$ nach Weglassung aller derjenigen, deren Ordnung mod $\mathfrak{p}^s$ gleich 1 ist (die also selbst $\equiv$ mod $\mathfrak{p}^s$ sind), wieder eine Basis der Gruppe $\mathfrak{G}_s$. Sind also $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ die Ordnungen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda$ mod $\mathfrak{p}^s$, welche sämtlich gleich näher zu bestimmende Potenzen $p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots, p^{\mu_\lambda}$ $(\mu_i \geqq 0)$ von p sind, so sind alle mod $\mathfrak{p}^s$ inkongruenten Einseinheiten η aus $K(\mathfrak{p})$ eindeutig in der Form

$$\eta \equiv \eta_1^{c_1^{(s)}} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda^{(s)}} \bmod \mathfrak{p}^s \quad (0 \leqq c_i^{(s)} < p_i)$$

darstellbar, d. h. die Gruppe $\mathfrak{G}_s$ hat die Primzahlpotenzinvarianten $p_1, \ldots, p_\lambda$, die Primzahlpotenzordnung $P_s = p_1 p_2 \cdots p_\lambda$, und es lassen sich die zuvor zusammengestellten allgemeinen Tatsachen über endliche abelsche Gruppen auf diese Kongruenzgruppen anwenden.

III. Die zu den Einseinheiten η gehörigen Gradpunkte. Ihre Einordnung in die zugehörigen Intervalle (ϱ). Der Hauptsatz über die Gradpunkte zweier Einseinheiten η und η^p.

Dazu müssen zunächst die Ordnungen $p_i = p^{\mu_i}$ der Basiseinheiten η_i mod $\mathfrak{p}^s$ näher bestimmt werden. Ich benutze zu diesem Zweck die folgende einfache Tatsache, die schon meiner früheren Untersuchung über diesen Gegenstand zugrundelag: Ist

$$\eta = 1 + w\pi^h + \cdots$$

eine Einseinheit eines beliebigen Grades h, so ist nach dem binomischen Satz

$$\eta^p = 1 + pw\pi^h + \cdots + w^p\pi^{hp} + \cdots,$$

wo die durch Punkte bezeichneten Glieder von höherer Ordnungszahl sind als eines der beiden hingeschriebenen. Da nun $\pi^e \sim p$ ist, so haben diese beiden Glieder die Ordnungszahlen $h + e$ und hp. In unserem allgemeinen Falle heben sie sich niemals auf, d. h. *η^p ist eine Einseinheit vom genauen Grade Min $(h + e, hp)$, also vom Grade hp oder $h + e$, je nachdem $h \leqq r_0$ oder $h > r_0$ ist.*

Durch wiederholte Anwendung dieser Tatsache kommt man zu folgendem Ergebnis:

Ist $\eta = 1 + w\pi^h + \cdots$ irgendeine Einseinheit vom Grade h, und ist p^ν die kleinste Potenz von p, für welche $hp^\nu > r_0$ ist, so sind die Potenzen

$$\eta, \eta^p, \ldots, \eta^{p^\nu}, \eta^{p^{\nu+1}}, \quad \eta^{p^{\nu+2}}, \quad \ldots$$

Einseinheiten der Grade

$$h, hp, \ldots, hp^\nu, hp^\nu + e, hp^\nu + 2e, \ldots.$$

Um nun die Ordnung p^μ einer beliebigen Basiseinheit $\eta = 1 + w\pi^k + \cdots$ für irgendeinen Modul $\mathfrak{p}^s$ zu bestimmen und um dann die Anzahl aller Basiseinheiten festzustellen, welche mod $\mathfrak{p}^s$ dieselbe Ordnung besitzen, kann man die folgende graphische Methode mit Vorteil anwenden:

Die beiden rationalen Zahlen r_0 und $r_0 p = r_0 + e$ begrenzen das Intervall aller Zahlen h, für welche

$$(r_0 < h \leqq r_0 + e) = (r_0 < h \leqq r_0 p)$$

ist, das ich als den *Fundamentalbereich des Körpers* $K(\mathfrak{p})$ bezeichne. Dieser enthält genau $[r_0 + e] - [r_0] = e$ ganze Zahlen $(r+1, r+2, \ldots, r+e)$, wenn $r = [r_0]$ gesetzt ist.

Ist nun s_0 eine beliebige unter den e ganzen Zahlen dieses Fundamentalbereiches, so wollen wir alle und nur die Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_s$ untersuchen, für welche die Ordnungszahl s des Moduls $\mathfrak{p}^s$ eine der Zahlen

$$\left(\ldots, \frac{s_0}{p^2}, \frac{s_0}{p}, s_0, s_0 + e, s_0 + 2e, \ldots\right) = (\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots)$$

ist, wo also

$$s = s_\nu = s_0 p^\nu \quad (\nu = 0, -1, -2, \ldots), \text{ also } \nu \leqq 0,$$

oder

$$s = s_\nu = s_0 + \nu e \quad (\nu = 0, +1, +2, \ldots), \text{ also } \nu \geqq 0$$

ist, wo also s „p-äquivalent s_0“ oder „e-kongruent s_0“ ist, je nachdem $s \leqq s_0$ oder $s \geqq s_0$ ist. Zu jeder solchen Zahl s ist die zugehörige s_0 eindeutig bestimmt, denn zwei zu demselben s gehörige Zahlen s_0 und s_0' müßten ja zueinander p-äquivalent bzw. e-kongruent sein, was in dem Fundamentalintervalle $\left(r_0 < \frac{s_0}{s_0'} \leqq r_0 p\right)$ bzw. $\left(r_0 < \frac{s_0}{s_0'} \leqq r_0 + e\right)$ unmöglich ist.

Ich fixiere nun auf einer positiven Halbgeraden zuerst die beiden Grenzpunkte r_0 und $r_0 + e = r_0 p$ des Fundamentalbereiches und dann von dem inneren Punkte s_0 ausgehend die zu der Zahlenreihe

$$\left(\ldots, \frac{s_0}{p^2}, \frac{s_0}{p}, s_0, s_0 + e, s_0 + 2e, \ldots\right) = (\ldots, s_{-1}, s_{-2}, s_0, \ldots)$$

gehörigen Punkte; dann begrenzen je zwei aufeinander folgende Punkte das Teilintervall

$$(\varrho) = (s_\varrho, \ldots, s_{\varrho+1})$$

aller Punkte h, für welche

$$s_\varrho \leqq h < s_{\varrho+1}$$

ist, und diese unendlich vielen Bereiche (ϱ) $(\varrho = -\infty \cdots +\infty)$ erfüllen die Halbgerade lückenlos, so daß jeder Punkt h derselben einem einzigen Intervalle angehört.

Jeder Einheit h-ten Grades $\eta = 1 + w\pi^h + \cdots$ werde nun auf dieser Halbgeraden der ganzzahlige Gitterpunkt h als ihr „Gradpunkt“ zugeordnet. Dann besteht der Satz:

Gehört der Gradpunkt h von η einem Intervalle (ϱ) an, so gehört der Gradpunkt von η^p stets zum nächstfolgenden Intervalle $(\varrho + 1)$.

Dies geht für alle Intervalle (ϱ) außer dem einen $(-1) = (s_{-1}, \ldots, s_0)$ unmittelbar aus der Tatsache hervor, daß

$$\eta^p = 1 + w^p \pi^{hp} + \cdots \text{ bzw. } \eta^p = 1 + pw\pi^p + \cdots$$

stets den Grad hp oder $h + e$ besitzt, je nachdem hp nicht größer oder nicht kleiner als $h + e$ ist, oder also je nachdem $h \leqq r_0$ oder $h \geqq r_0$ ist.

Also tritt der erste Fall für alle Einheiten ein, deren Gradpunkt h einem Intervalle (ϱ) angehört, wo $\varrho < -1$ ist, der zweite für alle diejenigen Einheiten, deren Gradpunkt zu einem Intervalle (0), (1), (2), ... gehört.

Da aber in beiden Fällen aus der Annahme, daß h in einem solchen Intervalle (ϱ) liegt, daß also:

$$s_0 p^\varrho \leqq h < s_0 p^{\varrho+1} \quad (\varrho \leqq -2) \quad \text{oder} \quad s_0 + \varrho e \leqq h < s_0 + (\varrho+1)\, e \qquad (\varrho \geqq 0)$$

ist, unmittelbar folgt, daß

$$s_0 p^{\varrho+1} \leqq hp < s_0 p^{\varrho+2} \quad \text{oder} \quad s_0 + (\varrho+1)\, e \leqq h + e < s_0 + (\varrho+2)\, e$$

ist, so folgt, daß der Gradpunkt von η^p beide Male dem Intervalle $(\varrho+1)$ angehört.

Um nun dasselbe auch für das eine vorher ausgeschlossene Intervall $(-1) = (s_{-1}, \ldots, s_0)$ zu beweisen, zerlege ich dieses und das folgende $(0) = (s_0, \ldots, s_1)$ durch die beiden ihnen angehörigen Grenzpunkte r_0 und $r_0 p = r_0 + e$ in die Teilintervalle:

$$(-1) = (-1)_1 + (-1)_2 = (s_{-1}, \ldots, r_0) + (r_0, \ldots, s_0),$$
$$(0) = (0)_1 + (0)_2 = (s_0, \ldots, r_0 p) + (r_0 + e, \ldots, s_1).$$

Dann folgt für jedes h aus $(-1)_1$ aus der Annahme

$$\frac{s_0}{p} \leqq h < r_0,$$

daß $s_0 \leqq hp < r_0 p$ ist, daß also der Gradpunkt hp von η^p zu $(0)_1$ gehört. Liegt dagegen der Gradpunkt h' von η in $(-1)_2$, so folgt aus

$$r_0 \leqq h' < s_0,$$

daß $r_0 + e \leqq h' + e < s_0 + e$, daß also der Gradpunkt von η^p dem Teilintervalle $(0)_2$ von (0) angehört.

IV. Die Invarianten einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}_s$ und ihre Vielfachheit. Ihre Basisanzahl und ihre Ordnung. Hauptsatz über alle zu demselben Anfangsgliede s_0 gehörigen Kongruenzgruppen.

Auf dieser Grundlage kann man nun sofort angeben, welche Ordnung eine Einheit η von einem beliebigen Grade h mod $\mathfrak{p}^s$, d. h. in einer beliebigen Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_s$ hat. Ist nämlich $s = s_\nu = s_0 p^\nu$ oder $= s_0 + \nu e$ und gehört der Gradpunkt h von η dem Intervalle (ϱ) an, wo nur $\varrho < \nu$ in Betracht kommt, so besitzt η die Ordnung $p^{\nu-\varrho}$, denn dies ist ja die kleinste Zahl, für welche $\eta^{p^{\nu-\varrho}} \equiv 1 \pmod{p^{s_\nu}}$ ist, da erst diese Potenz von η dem Intervalle (ν) angehört.

Ferner kann nun leicht die Anzahl aller Basiseinheiten $\eta = 1 + w\pi^k + \cdots$ gefunden werden, welche mod $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ eine und dieselbe Ordnung $p^{\nu-\varrho}$ haben, d. h. die Anzahl a_ϱ aller Invarianten der Gruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}$, welche dieselbe Ordnung $p^{\nu-\varrho}$ besitzen. Diese ist nämlich, wie jetzt gezeigt werden soll, gleich dem f-fachen aller verschiedenen ganzen zu p primen Zahlen $(k, k', k'', \ldots)$, welche in dem Intervalle $(\varrho) = (s_\varrho, \ldots, s_{\varrho+1})$ vorhanden sind, wenn $\varrho < \nu$ ist; und hier muß $\varrho \leqq 0$ angenommen werden, denn alle und nur die in den Intervallen (0), (−1), (−2), ... auftretenden zu p primen ganzen Zahlen kommen ja als Grade der λ Basiseinheiten $\eta = 1 + w\pi^k + \cdots$ vor, d. h. für $\varrho > 0$ sind alle diese Anzahlen $a_\varrho = 0$.

In der Tat sind nun mod $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ alle und nur die Basiseinheiten η primitive $p^{\nu-\varrho}$-te Einheitswurzeln, deren Gradpunkte k dem Intervalle (ϱ) angehören, und zu jeder solchen Gradzahl k gehören genau f verschiedene Basiseinheiten

$$1 + w_1\pi^k + \cdots,\ 1 + w_2\pi^k + \cdots, \ldots,\ 1 + w_f\pi^k + \cdots,$$

deren Anfangskoeffizienten $(w_1, w_2, \ldots, w_f)$ eine Basis mod $\mathfrak{p}$ bilden.

Die Anzahl aller zu p primen ganzen Zahlen in einem Intervalle

$$(\varrho) = (s_\varrho, \ldots, s_{\varrho+1}) = (s_0 p^\varrho, \ldots, s_0 p^{\varrho+1})$$

für ein beliebiges negatives ϱ ist nun stets gleich

$$\{s_{\varrho+1}\} - 2\{s_\varrho\} + \{s_{\varrho-1}\},$$

wenn allgemein $\{t\}$ die nächstkleinere ganze Zahl *vor* der positiven Zahl t bedeutet. In der Tat ist ja die Anzahl aller ganzen Zahlen h, für welche $1 \leqq h < s_{\varrho+1}$ ist, offenbar gleich $\{s_{\varrho+1}\}$, und die Anzahl aller Multipla ph' von p im gleichen Intervalle, für welche also $p \leqq ph' < s_{\varrho+1}$, oder nach Division mit p, $1 \leqq h' < s_\varrho$ ist, gleich $\{s_\varrho\}$. Also ist $\{s_{\varrho+1}\} - \{s_\varrho\}$ die Anzahl aller zu p primen Zahlen $(1 \leqq k < s_{\varrho+1})$, und da nach demselben Satze die Anzahl aller zu p primen Zahlen k' im vorhergehenden Intervalle $(1 \leqq k' < s_\varrho)$ gleich $\{s_\varrho\} - \{s_{\varrho-1}\}$ ist, so ist die Differenz beider Anzahlen wirklich die oben angegebene Zahl aller zu p primen Zahlen $(s_\varrho \leqq k < s_{\varrho+1})$ im Intervalle (ϱ) für $\varrho < 0$.

Genau dieselbe Formel gilt auch für das vorher ausgeschlossene Intervall $(0) = (s_0, \ldots, s_1) = (0)_1 + (0)_2 = (s_0, \ldots, r_0 p) + (r_0 p, \ldots, s_1)$. Hier sind nämlich allein die zu p primen Zahlen k zu zählen, welche im ersten Teilintervalle $(0)_1$ liegen, da dem Intervalle $(0)_2$ keine Basiseinheiten mehr entsprechen. Da aber die Anzahl aller zu p primen Zahlen k im Intervalle $(1, \ldots, r_0 p)$ gleich e war, während die entsprechende Anzahl für das Intervall $(1, \ldots, s_0)$ gleich $\{s_0\} - \{s_{-1}\}$ ist, so ergibt sich hier für die Anzahl aller zu p primen Zahlen im Intervalle (0)

$$e - \{s_0\} + \{s_{-1}\} = \{s_1\} - 2\{s_0\} + \{s_{-1}\},$$

wie man leicht erkennt, also genau derselbe Ausdruck wie für ein beliebiges $\varrho < 0$.

Dieselbe Formel $\{s_{\varrho+1}\} - 2\{s_\varrho\} + \{s_{\varrho-1}\}$ gibt aber auch für ein beliebiges positives ϱ die Anzahl der verschiedenen Gradzahlen aller Basiseinheiten η, welche primitive $p^{\nu-\varrho}$-te Einheitswurzeln sind, denn unter dieser Voraussetzung sind ja alle diese Anzahlen

$$\{s_{\varrho+1}\} - 2\{s_\varrho\} + \{s_{\varrho-1}\} = \{s_0 + (\varrho+1)e\} - 2\{s_0 + \varrho e\} + \{s_0 + (\varrho-1)e\} = 0.$$

Für die Anzahl a_ϱ aller Basiseinheiten, welche mod $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ *die Ordnungszahl $p^{\nu-\varrho}$ besitzen, gilt also für jedes $\varrho < \nu$ die Gleichung*

$$a_\varrho = f(\{s_{\varrho+1}\} - 2\{s_\varrho\} + \{s_{\varrho-1}\}).$$

Nunmehr können wir die ganze Reihe

$$\ldots, \mathfrak{G}_{s_{-2}}, \mathfrak{G}_{s_{-1}}, \mathfrak{G}_{s_0}, \mathfrak{G}_{s_1}, \mathfrak{G}_{s_2}, \ldots$$

aller endlichen Kongruenzgruppen untersuchen, für welche der Exponent $s = s_\nu$ des Moduls $\mathfrak{p}^s$ die Reihe $(\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots)$ aller zu einer und derselben Zahl s_0 des Fundamentalbereiches $(r_0 < s_0 \leqq r_0 + e)$ p-äquivalenten bzw. e-kongruenten Zahlen durchläuft, um so zu der engen Beziehung dieser endlichen Kongruenzgruppen untereinander und zu der unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ aller Einheiten aus $K(\mathfrak{p})$ zu gelangen. Für genügend große negative Indizes ν wird hier der Modul $\mathfrak{p}^{s_\nu} = \mathfrak{p}^{s \cdot p^\nu}$ eine gebrochene Potenz von $\mathfrak{p}$, aber alle bisher abgeleiteten Resultate bleiben auch für diese Moduln bestehen. Außerdem stimmt dann die zugehörige Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{\bar{s}_\nu}$ überein, wenn $\bar{s}_\nu = \{s_\nu + 1\}$ die kleinste ganze Zahl $\geqq s_\nu$ ist.

Für einen beliebigen Modul $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ bilden nun alle und nur die λ_ν Elemente der Basis $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda)$ für die unendliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_0$ eine Basis $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\lambda_\nu})$, deren Ordnungen mod $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ größer als 1 sind, deren Gradzahlen $k, k', \ldots$ also den Intervallen $(\nu-1), (\nu-2), \ldots$ angehören. Ihre Anzahl λ_ν, d. h. die Basisanzahl der Kon-

gruenzgruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ ist also durch die Gleichung

$$\lambda_\nu = a_{\nu-1} + a_{\nu-2} + \cdots$$

gegeben. Andererseits ist aber

$$\lambda_\nu = \{s_\nu\} - \{s_{\nu-1}\}$$

die Anzahl aller zu p primen ganzen Zahlen $k, k', \ldots$ in dem ganzen Intervalle $(1 \leqq k < s_\nu)$ multipliziert mit f, d. h. für die Basisanzahl λ_ν von $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ besteht immer die Gleichung:

$$\lambda_\nu = a_{\nu-1} + a_{\nu-2} + \cdots = f(\{s_\nu\} - \{s_{\nu-1}\}).$$

Endlich kann man nun auch die Ordnung p^{r_ν} einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ leicht angeben: Da nämlich jedes seiner Basiselemente $\eta = 1 + w\pi^k + \cdots$, dessen Gradzahl k dem Intervalle (ϱ) angehört $(\varrho < \nu)$, für den Modul $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ die Ordnungszahl $p^{\nu-\varrho}$ besitzt, so besteht für den Exponenten r_ν dieser Ordnung die Gleichung:

$$\begin{aligned} r_\nu &= a_{\nu-1} + 2a_{\nu-2} + 3a_{\nu-3} + \cdots \\ &= (a_{\nu-1} + a_{\nu-2} + \cdots) + (a_{\nu-2} + a_{\nu-3} + \cdots) + \cdots \\ &= \lambda_\nu + \lambda_{\nu-1} + \lambda_{\nu-2} + \cdots \\ &= f((\{s_\nu\} - \{s_{\nu-1}\}) + (\{s_{\nu-1}\} - \{s_{\nu-2}\}) + \cdots) \\ &= f\{s_\nu\}. \end{aligned}$$

Aus diesen Sätzen ergeben sich unmittelbar die Umkehrungsgleichungen:

$$\lambda_\nu = r_\nu - r_{\nu-1}, \qquad a_{\nu-1} = \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}.$$

Alle diese Ergebnisse können also in dem allgemeinen Satze zusammengefaßt werden:

Die Ordnungen

$$\ldots,\ p^{r_{-3}},\quad p^{r_{-2}},\quad p^{r_{-1}},\quad p^{r_0},\quad p^{r_1},\quad p^{r_2},\quad \ldots$$

der Kongruenzgruppen

$$\ldots,\ \mathfrak{G}_{s_{-3}},\quad \mathfrak{G}_{s_{-2}},\quad \mathfrak{G}_{s_{-1}},\quad \mathfrak{G}_{s_0},\quad \mathfrak{G}_{s_1},\quad \mathfrak{G}_{s_2},\quad \ldots$$

besitzen die Exponenten

$$\ldots,\ r_{-3},\quad r_{-2},\quad r_{-1},\quad r_0,\quad r_1,\quad r_2,\quad \ldots,$$

welche die Reihe der ganzen Zahlen

$$\ldots,\ \{s_{-3}\}f,\quad \{s_{-2}\}f,\quad \{s_{-1}\}f,\quad \{s_0\}f,\quad \{s_1\}f,\quad \{s_2\}f,\quad \ldots$$

bilden. Ihre erste Differenzenreihe

$$\ldots,\quad \lambda_{-2},\quad \lambda_{-1},\quad \lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots$$

ergibt die Basiszahlen dieser Gruppen, und ihre zweite Differenzenreihe

$$\ldots,\quad a_{-2},\quad a_{-1},\quad a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots$$

gibt die Anzahlen der Basiselemente gleicher Ordnung, welche in diesen Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ auftreten. Die a_ϱ Basiselemente η_i endlich besitzen in einer dieser Gruppen $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ die gemeinsame Ordnung $p^{\nu-\varrho}$.

Es werde hierzu noch bemerkt, daß für die nicht negativen Indizes die Zahlen der obigen Reihe $(r_0, r_1, r_2, \ldots)$ und die ihrer beiden Differenzenreihen die folgenden Werte haben:

$$\begin{aligned} (r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots) &= ((s_0 - 1)f, ((s_0 - 1) + e)f, ((s_0 - 1) + 2e)f, \ldots) \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots) &= (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots) \\ (a_1, a_2, \ldots) &= (0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Von dieser Stelle an besitzen also die Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_s$ sämtlich die volle Basis $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda)$ der unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, während die Basisanzahlen von $\mathfrak{G}_{s_0}, \mathfrak{G}_{s_{-1}}, \cdots$ um die Zahlen $a_0, a_{-1}, \ldots$ abnehmen.

So bestimmen sich die λ_ν Invarianten $p_1, p_2, \ldots, p_{\lambda_\nu}$ einer Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_s = \mathfrak{G}_{s_\nu}$ für eine beliebige Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^s$ als Modul sehr einfach und ganz allgemein folgendermaßen:

Die λ_ν Invarianten p_i der Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_s$ in aufsteigender Reihenfolge geordnet sind die folgenden:

$$p, \quad p^2, \quad p^3, \quad p^4, \quad \ldots$$

mit den Vielfachheiten

$$a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, a_{\nu-3}, a_{\nu-4}, \ldots,$$

und somit besteht für die Ordnung der beliebigen Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_s$ stets die Gleichung:

$$p_1 p_2 \cdots p_{\lambda_\nu} = p^{a_{\nu-1}+2a_{\nu-2}+\cdots} = p^{f(s)} = n(\mathfrak{p}^{(s)}).$$

Für ein $s = s_\nu$ mit positivem Index ν sind speziell $a_{\nu-1} = a_{\nu-2} = \cdots = a_1 = 0$; in diesem Falle ergeben sich also die $\lambda_\nu = \lambda$ Invarianten $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ gleich

$$p^\nu, p^{\nu+1}, p^{\nu+2}, \ldots$$

mit den Vielfachheiten

$$a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$$

und damit die folgende einfache Gleichung für die Ordnung aller dieser Gruppen $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ für $\nu \geqq 0$:

$$p_1 p_2 \cdots p_\lambda = p^{\nu a_0+(\nu+1)a_{-1}+\cdots} = n(\mathfrak{p}^{s-1}).$$

Um einen Überblick über den Zusammenhang der hier untersuchten Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_s$ für alle $s \sim s_0$ zu gewinnen, betrachte ich jetzt die zu diesem s_0 im Fundamentalbereich $(r_0, \ldots, r_0 p)$ zugehörige Kurve $\mathfrak{C}_{s_0}$ (s. d. Figur auf der nächsten Seite)

$$\begin{array}{ll} s = s_0 p^r, & s = s_0 + re \\ (r \leqq 0) & (r > 0) \end{array}$$

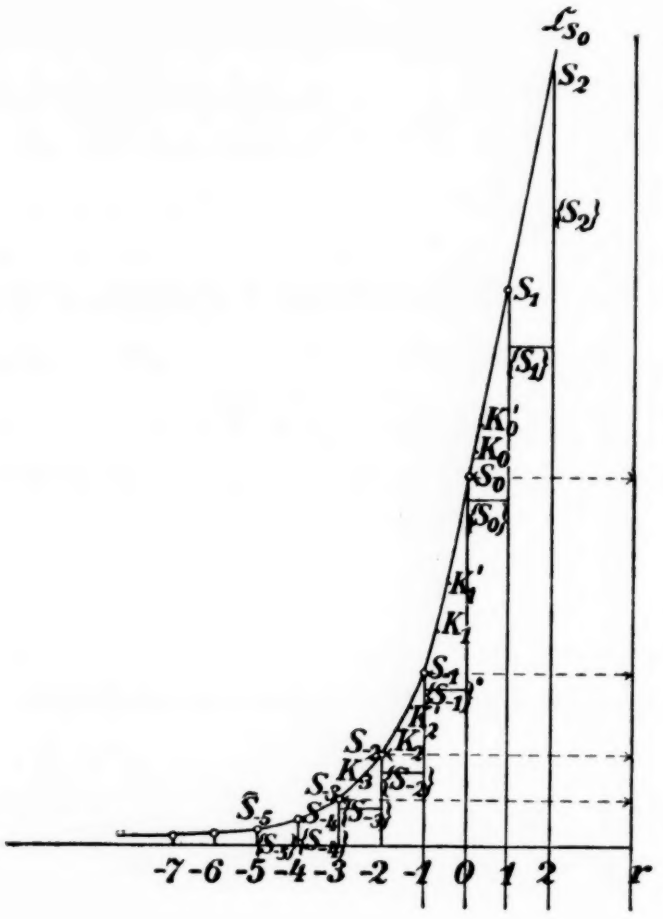
und konstruiere die zu ihren Punkten $S_\nu = (\nu, s_\nu)$ gehörigen, unterhalb jener Kurve $\mathfrak{C}_{s_0}$ liegenden ganzzahligen Gitterpunkte $\{S_\nu\} = (\nu, \{s_\nu\})$. Dann besagt der soeben bewiesene Satz geometrisch folgendes:

Die Ordinaten der Gitterpunktreihe $\{S_\nu\}$ bilden mit f multipliziert die Reihe $(\ldots, r_\nu, \ldots)$ der Ordnungszahlen der Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_\nu$. Diese unterhalb der Begrenzungskurve $\mathfrak{C}_{s_0}$ liegenden Punkte bestimmen in der positiven Halbebene eine nicht absteigende Stufenfolge, deren Stufen parallel den Achsen verlaufen und deren Stufenhöhen mit f multipliziert die Anzahlen $(\ldots, \lambda_\nu, \ldots)$ der Basiselemente dieser Kongruenzgruppen sind, welche ebenfalls eine nicht abnehmende Größenreihe bilden. Die Zunahmen dieser Stufenhöhen bilden endlich mit f multipliziert die Reihe $(\ldots, a_\nu, \ldots)$ der Vielfachheiten der Invarianten dieser Kongruenzgruppen.

Die Punkte S_ν der Kurve $\mathfrak{C}_{s_0}$ begrenzen nun auf ihr die Intervalle $(\varrho) = (S_\varrho, \ldots, S_{\varrho+1})$, welche den gleich bezeichneten Intervallen $(\varrho) = (s_\varrho \leqq h < s_{\varrho+1})$ auf der s-Achse entsprechen. Eine beliebige Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_\nu$ für den Modul $\mathfrak{p}^{s_\nu}$ besitzt dann die $\lambda_\nu = a_{\nu-1} + a_{\nu-2} + \cdots$ Invarianten der Ordnungszahlen $p, p^2, p^3, \ldots$ mit den Vielfachheiten $a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, a_{\nu-3}, \ldots$. Allgemein ist die Ordnungszahl der $a_{\nu-\varrho}$ Basiseinheiten $1 + w\pi^k + \cdots$, deren zugehörige Kurvenpunkte $K = (r_k, k)$, $K' = (r_{k'}, k'), \ldots$ dem Intervalle $(\varrho) = (S_\varrho, \ldots, K, K', \ldots, S_{\varrho+1})$ angehören, gleich dem senkrechten Abstande $(\nu - \varrho)$ seines Anfangspunktes S_ϱ von der zu S_ν gehörigen Ordinate $\nu\vec{S}_\nu$.

Es erscheint mir erwähnenswert, daß mit diesem verhältnismäßig einfachen arithmetischen Problem der algebraischen Zahlentheorie in notwendiger naturgemäßer Ver-

bindung die Kurve $\mathfrak{C}_{s_0}$ auftritt, welche aus zwei zwar nahe verwandten, aber analytisch verschiedenen Kurvenstücken, nämlich einer Exponentialkurve und einer geraden Linie besteht.



V. Über die Beziehung zwischen zwei Gruppenreihen $(\ldots, \mathfrak{G}_s, \ldots)$ und $(\ldots, \mathfrak{G}_{s'}, \ldots)$, welche zu zwei benachbarten Anfangsgliedern s_0 und $s_0 + 1$ gehören. — Die Untergruppen einer beliebigen Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_s$.

Um eine vollständige Übersicht über die sämtlichen endlichen Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_s$ zu gewinnen, soll jetzt endlich noch die Beziehung untersucht werden, welche zwischen der Gruppenreihe $\mathfrak{G}_{s_i}$, deren Ordnungszahlen $(\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots)$ einer der e Zahlen s_0 p-äquivalent bzw. e-kongruent sind, und derjenigen Gruppenreihe $\mathfrak{G}_{s_i'}$ besteht, deren Ordnungszahlen $(\ldots, s'_{-2}, s'_{-1}, s'_0, s'_1, \ldots)$ der nächstfolgenden Zahl $s'_0 = s_0 + 1$ des Grundintervalles $(r_0, \ldots, r_0 p)$ p-äquivalent bzw. e-kongruent sind.

Dazu braucht man nur die Beziehung zwischen den Exponenten

$$(\ldots, r_\nu, \ldots) = (\ldots, f\{s_\nu\}, \ldots)$$

der Ordnungen aller zu s_0 gehörigen Gruppen $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ und den Exponenten

$$(\ldots, r'_\nu, \ldots) = (\ldots, f\{s'_\nu\}, \ldots)$$

aller zu $s'_0 = s_0 + 1$ gehörigen Gruppen $\mathfrak{G}_{s'_\nu}$ anzugeben, weil sich ja aus diesen beiden Reihen die Reihen $(\ldots, \lambda_\nu, \ldots)$ und $(\ldots, \lambda'_\nu, \ldots)$ sowie die Reihen $(\ldots, a_\nu, \ldots)$ und $(\ldots, a'_\nu, \ldots)$ als erste und zweite Differenzenreihen von $(\ldots, r_\nu, \ldots)$ und $(\ldots, r'_\nu, \ldots)$ unmittelbar ergeben.

Da nun für $\nu \geqq 0$

$$\{s'_\nu\} - \{s_\nu\} = (s'_0 + \nu e - 1) - (s_0 + \nu e - 1) = s'_0 - s_0 = 1$$

ist, so ergibt sich zunächst:

Der rechte Teil $(r_0, r_1, r_2, \ldots)$ *von* $(\ldots, r_\nu, \ldots)$ *geht in den rechten Teil* $(r'_0, r'_1, r'_2, \ldots)$ *von* $(\ldots, r'_\nu, \ldots)$ *durch Vermehrung aller Elemente um* f *Einheiten über.*

Um ferner das entsprechende Resultat für die linken Teile $(\ldots, r_{-2}, r_{-1})$ und $(\ldots, r'_{-2}, r'_{-1})$ jener beiden Reihen herzuleiten, beweise ich leicht, daß ganz allgemein die

Gleichungen bestehen:

$$\{s'_{-\delta}\} = \{s_{-\delta}\} \text{ oder } \{s'_{-\delta}\} = \{s_{-\delta}\} + 1\,,$$

je nachdem s_0 durch p^δ teilbar ist oder nicht. In der Tat, ist $s_0 = a_0 + p^\delta a_1$ $(a_0 < p^\delta)$, so ist zunächst:

$$\{s_{-\delta}\} = \left\{\frac{s_0}{p^\delta}\right\} = \left\{\frac{a_0}{p^\delta} + a_1\right\} = a_1 - 1 \quad \text{oder} \quad = a_1\,,$$

je nachdem

$$a_0 = 0, \text{ also } p^\delta | s_0, \text{ oder } a_0 > 0, \text{ also } p^\delta \nmid s_0\,.$$

Ferner ist in *jedem* Falle

$$\{s'_{-\delta}\} = \left\{\frac{s_0 + 1}{p^\delta}\right\} = \left\{\frac{a_0 + 1}{p^\delta} + a_1\right\} = a_1\,.$$

Also ist wirklich

$$\{s'_{-\delta}\} = a_1 = \{s_{-\delta}\} + 1 \quad \text{oder} \quad = \{s_{-\delta}\}\,,$$

je nachdem $p^\delta | s_0$ oder $p^\delta \nmid s_0$ ist.

Durch Anwendung dieser beiden Ergebnisse folgt also, daß, falls $s_0 = p^\varkappa \bar{s}_0$ die Ordnungszahl α besitzt, die α ersten Glieder $r_{-\alpha}, r_{-(\alpha-1)}, \ldots, r_{-1}$ des linken Teiles von $(\ldots, r_\nu, \ldots)$ beim Übergange zu $(\ldots, r'_\nu, \ldots)$ auch um je f Einheiten wachsen, während alle übrigen Glieder dieses Teiles ungeändert bleiben. Zusammenfassend kann man also die Beziehung jener beiden Reihen $(\ldots, r_\nu, \ldots)$ und $(\ldots, r'_\nu, \ldots)$ so aussprechen:

Besitzt $s_0 = p^\varkappa \bar{s}_0$ die Ordnungszahl α, so geht $(\ldots, r'_\nu, \ldots)$ aus $(\ldots, r_\nu, \ldots)$ dadurch hervor, daß alle Glieder $r_{-\alpha}, r_{-(\alpha-1)}, \ldots$ von $r_{-\alpha}$ ab um f Einheiten vergrößert werden.

Die Bildung der ersten und zweiten Differenzenreihe von $(\ldots, r'_\nu, \ldots)$ ergibt somit das folgende Schema:

$$\begin{aligned}
(\ldots, r'_\nu, \ldots) &= (\ldots, r_{-(\alpha+1)}, r_{-\alpha} + f, r_{-(\alpha-1)} + f, \ldots)\\
(\ldots, \lambda'_\nu, \ldots) &= (\ldots, \lambda_{-(\alpha+1)}, \lambda_{-\alpha} + f, \lambda_{-(\alpha-1)}, \lambda_{-(\alpha-2)}, \ldots)\\
(\ldots, a'_\nu, \ldots) &= (\ldots, a_{-(\alpha+1)} + f, a_{-\alpha} - f, a_{-(\alpha-1)}, a_{-(\alpha-2)}, \ldots),
\end{aligned}$$

d. h. man erhält das interessante Resultat:

Besitzt s_0 die Ordnungszahl α, so vergrößert sich bei dem Übergange von s_0 zu $s_0 + 1$ nur die Basisanzahl $\lambda_{-\alpha}$ von $\mathfrak{G}_s$ um f Einheiten, während alle übrigen Basisanzahlen ungeändert bleiben. Ferner nehmen bei diesem Übergange die Vielfachheiten $a_{-(\alpha+1)}$ und $a_{-\alpha}$ um f Einheiten zu bzw. um f Einheiten ab, während alle übrigen Vielfachheiten a_ν ungeändert bleiben.

Es soll jetzt für irgendeine Kongruenzklassengruppe $\mathfrak{G}_s = \mathfrak{G}_{s_\nu}$ eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{G}_s^{(t)}$, d. h. die Gruppe aller Elemente X aus $\mathfrak{G}_s$ mit $X^{p^t} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^t}$, also die Gruppe aller ihrer p^t-ten Einheitswurzeln untersucht werden, wenn p^t ein beliebiger Teiler des Grades $p^{r_\nu} = n(\mathfrak{p}^{(s_\nu)})$ der Gruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ ist.

Aus den Resultaten des ersten Abschnittes ergibt sich nun unmittelbar, daß von den λ_ν Basiselementen η von $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ alle und nur diejenigen Basiselemente auch für $\mathfrak{G}_{s_\nu}^{(t)}$ sind, deren Ordnungszahlen kleiner als p^t sind, während für alle diejenigen Elemente η, deren Ordnungszahl $\geqq p^t$ ist, $\eta^{p^{\nu-t}}$ ein Basiselement für $\mathfrak{G}_s^{(t)}$ wird.

So ergeben sich also für die Ordnungszahlen

$$p,\ p^2, \ldots, p^{t-1},\ p^t$$

der Reihe nach die Vielfachheiten

$$a_{\nu-1},\ a_{\nu-2},\ \ldots,\ a_{\nu-(t-1)},\ (a_{\nu-t} + a_{\nu-(t+1)} + \cdots)$$

für die Untergruppe $\mathfrak{G}_s^{(t)}$, und der Grad dieser Untergruppe besitzt hiernach den Exponenten

$$\begin{aligned} n_\nu^{(t)} &= 1 \cdot a_{\nu-1} + 2a_{\nu-2} + \cdots + (t-1)\, a_{\nu-(t-1)} + t(a_{\nu-1} + a_{\nu-(t+1)} + \cdots) \\ &= r_\nu - r_{\nu-t} = f(\{s_\nu\} - \{s_{\nu-t}\}), \end{aligned}$$

wie die Darstellung von r_ν und $r_{\nu-t}$ durch die Vielfachheiten a_ϱ unmittelbar ergibt. Für den Grad $p^{n_\nu^{(t)}}$ dieser Untergruppe selbst erhält man also stets die einfache Gleichung

$$p^{n_\nu^{(t)}} = n(p^{\{s_\nu\}-\{s_{\nu-t}\}}),$$

also gleich dem Grade der Faktorgruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}/\mathfrak{G}_{s_{\nu-t}}$. Ist speziell $\nu - t$ und damit auch $\nu \geqq 0$, so wird also diese Ordnung

$$p^{n_\nu^{(t)}} = n(\mathfrak{p}^{et}) = p^{\lambda t}.$$

Nach I erhält man endlich für die Anzahl $\varphi_\nu(p^t)$ aller primitiven p^t-ten Einheitswurzeln in der Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_{s_\nu}$ den Ausdruck

$$\varphi_\nu(p^t) = p^{r_\nu}\left(\frac{1}{p^{r_{\nu-t}}} - \frac{1}{p^{r_{\nu-(t-1)}}}\right).$$

VI. Ein Beispiel.

Als Beispiel betrachte ich den Fall eines π-adischen Körpers $K(\mathfrak{p})$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primfaktor von $p = 3$ sein möge, und für welchen $e = 31, f = 2$, also die Fundamentalinvariante $r_0 = \dfrac{e}{p-1} = \dfrac{31}{2}$, mithin das Grundintervall $(r_0, \ldots, r_0 p) = \left(\dfrac{31}{2}, \ldots, \dfrac{93}{2}\right)$ ist. Es sei nun $s_0 = 36$ in diesem Intervall beliebig gegeben; dann betrachte ich die Kongruenzgruppen $\mathfrak{G}_s = \mathfrak{G}_{s_\nu}$, deren Modulexponenten $s_\nu = 36 \cdot 3^\nu$ bzw. $s_\nu = 36 + 31\nu$ zu 36 3-äquivalent bzw. 31-kongruent sind, je nachdem $\nu \leqq 0$ oder $\nu > 0$ ist.

Dann bilden die Ordnungszahlen

$$(\ldots, r_\nu, \ldots) = (\ldots, 2\{s_\nu\}, \ldots)$$

der Grade dieser Gruppen die wachsende Reihe nicht negativer Zahlen

$$\begin{aligned} (\ldots, r_{-4}, \ldots, r_{-1}, r_0, r_1, \ldots) &= 2\left(\ldots, \left\{\frac{36}{3^4}\right\}, \left\{\frac{36}{3^3}\right\}, \left\{\frac{36}{3^2}\right\}, \left\{\frac{36}{3}\right\}, \{36\}, \{36 + \nu \cdot 31\}, \ldots,\right. \\ &= 2\,(\ldots, 0, 1, 3, 11, 35, 66, 97, \ldots), \end{aligned}$$

welche von $r_0 = 2 \cdot 35$ ab nach rechts eine arithmetische Reihe mit der Differenz $2 \cdot 31$ ist, und die nach links von dem Gliede $r_{-4} = 0$ ab lauter Nullen besitzt. Alle diese letztgenannten Gruppen $\mathfrak{G}_{s_{-4}}, \mathfrak{G}_{s_{-5}}, \ldots$ sind also die Einheitsgruppe.

Die erste Differenzenreihe

$$(\ldots, \lambda_{-4}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots) = 2(\ldots, 0, 1, 2, 8, 24, 31, 31, \ldots)$$

gibt von $\lambda_0 = 2 \cdot 24$ ausgehend die Anzahl der Basiselemente aller dieser Gruppen $\mathfrak{G}_{s_\nu}$, oder hier die doppelte Anzahl aller durch 3 nicht teilbaren ganzen Zahlen an, welche unterhalb s_ν liegen und $\leqq pr_0 = \dfrac{93}{2}$ sind.

Endlich ergibt ihre zweite Differenzenreihe

$$(\ldots, a_{-5}, a_{-4}, \ldots a_0, a_1, a_2, \ldots) = 2(\ldots, 0, 1, 1, 6, 16, 7, 0, 0 \ldots)$$

von $a_0 = 7$ ausgehend die Vielfacheiten a_ϱ aller dieser Basiselemente. Ihre Anzahl ist

gleich derjenigen aller durch 3 nicht teilbaren ganzen Zahlen $k, k', \ldots$ in den Intervallen $(s_\varrho \leqq k < s_{\varrho+1})$, wie auch eine einfache Abzählung bestätigt.

Betrachten wir zum Schlusse noch neben der vorliegenden Reihe

$$(\ldots, r_\nu, \ldots) = 2(\ldots, 0, 1, 3, 11, 35, 66, 97, \ldots),$$

welche zu $s_0 = 36 = 3^2 \cdot 4$ gehört, die zu $s_0 + 1 = 37$ gehörige Nachbarreihe:

$$(\ldots, r'_\nu, \ldots) = 2\left(\ldots, \left\{\frac{37}{9}\right\}, \left\{\frac{37}{3}\right\}, \{37\}, \{37 + \nu 31\}, \ldots\right)$$

$$= 2(\ldots, 0, 1, 4, 12, 36, 67, 98, \ldots),$$

so erkennen wir, daß sie wirklich vom Gliede $r'_{-2} = 8$ an gegen die vorige um je zwei Einheiten vergrößert ist, was, da 36 mod 3 die Ordnungszahl 2 hat, mit unserem allgemeinen Ergebnis in V übereinstimmt.

Eingegangen 8. Oktober 1936.

Über einen Irreduzibilitätssatz von Bertini[1]).

Von *Wolfgang Krull* in Erlangen.

1. Problemstellung.

Der *Hilbertsche Irreduzibilitätssatz* lautet bekanntlich:

Es sei K der Körper der rationalen Zahlen, $p(x, \lambda)$ sei ein über K irreduzibles Polynom in den *Variabeln* $x_1, \ldots, x_n$ und den *Parametern* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Dann kann man stets auf unendlich viele verschiedene Weisen die Parameter λ_i so zu Elementen ξ_i aus K spezialisieren, daß wieder ein über K irreduzibles Polynom $p(x, \xi)$ entsteht.

Dabei darf man sich auf *zulässige* Parameterspezialisierungen beschränken, die dadurch ausgezeichnet sind, daß beim Übergang von $p(x, \lambda)$ zu $p(x, \xi)$ keine Graderniedrigung eintritt.

Wählt man für K an Stelle des Körpers der rationalen Zahlen irgendeinen *algebraisch abgeschlossenen Körper*, so gilt der Irreduzibilitätssatz bestimmt nicht mehr, wenn $p(x, \lambda)$ ein Polynom *einer* Variabeln von höherem als erstem Grade darstellt, und daraus folgt sofort, *daß auch bei Polynomen in mehreren Variabeln von seiner Allgemeingültigkeit nicht mehr die Rede sein kann.* — Wir denken uns nun den algebraisch abgeschlossenen Koeffizientenkörper K ein für allemal festgelegt und bezeichnen ein über K irreduzibles Polynom $p(x, \lambda)$ als *Ausnahmepolynom*, wenn $p(x, \xi)$ bei jeder zulässigen Parameterspezialisierung $\lambda_i = \xi_i$ über K reduzibel wird. Andererseits bezeichnen wir ein Polynom $q(x)$ mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper Λ als *absolut reduzibel*, wenn $q(x)$ über dem zu Λ gehörigen algebraisch abgeschlossenen Körper $\widetilde{\Lambda}$ in Faktoren niedrigeren Grades zerfällt.

In 2. werden wir auf neuem, sehr einfachem Wege den von E. Noether[2]) stammenden Satz beweisen, daß stets rational mit endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob ein vorgelegtes Polynom $q(x)$ absolut reduzibel ist oder nicht. Bei der An-

---

[1]) Der Satz, um den es sich handelt, wurde von Bertini 1882 in geometrischer Fassung aufgestellt und bewiesen (Rend. R. Istituto Lombardo (2a) **15**). — Algebraische Beweise finden sich in folgenden Arbeiten:

I. Lüroth, Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Funktionen I u. II, Math. Annalen **42** (1892), S. 457—470, bzw. **44** (1894), S. 539—552.

E. Netto, Über einen Satz von Bertini, Ber. Oberhessische Ges. Natur- u. Heilkunde 1899.

G. Salomon, Über das Zerfallen von Systemen von Polynomen, Jahresber. Deutsche Math. Vereinig. **24** (1915), S. 225—246.

A. Riehle, Über den Bertinischen Satz und seine Erweiterung, Diss. Tübingen 1919.

L. Stickelberger, Neuer Beweis des Satzes von Bertini über zerlegbare lineare Scharen von Polynomen (Aus dem Nachlaß), Sitz. Ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1936.

Zitiert werden nur die drei letzten Arbeiten, und zwar kurz mit „Salomon", „Riehle", „Stickelberger". Den Anlaß zur vorliegenden Veröffentlichung gab die Beschäftigung mit dem Stickelbergerschen Beweis.

[2]) E. Noether, Ein algebraisches Kriterium für absolute Irreduzibilität, Math. Annalen **85** (1922), S. 26—33.

wendung dieses Satzes stößt man nebenbei auf interessante Beispiele zur van der Waerdenschen Vielfachheitstheorie (Multiplizitäten 0 bei durchaus sinnvollen Problemen), vor allem aber ergibt sich unmittelbar: *$p(x, \lambda)$ ist dann und nur dann ein Ausnahmepolynom im oben festgelegten Sinne, wenn $p(x, \lambda)$ als Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ allein absolut reduzibel ist* [3]).

Damit ist das Problem der Ausnahmepolynome oder allgemeiner das Problem des Irreduzibilitätssatzes bei algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper theoretisch erledigt. Da aber die rechnerische Entscheidung über die absolute Reduzibilität eines vorgelegten Polynoms $p(x, \lambda)$ i. a. äußerst mühsam ist, erhebt sich die Frage, ob es nicht einfache Fälle gibt, in denen die Ausnahmepolynome unmittelbar angegeben werden können. In dieser Richtung liegt die Aussage des *Bertinischen Satzes*.

Das Polynom $p(x, \lambda)$ ist sicher Ausnahmepolynom:

a) wenn zwei von den λ_i unabhängige Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ so bestimmt werden können, daß $p(x, \lambda)$ eine homogene Binärform höheren als ersten Grades in $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit Polynomen in den λ_i als Koeffizienten darstellt. (Zu a) ist auch der Fall zu rechnen, daß etwa $\psi(x) = 1$ und dementsprechend $p(x, \lambda)$ ein Polynom höheren als ersten Grades in $\varphi(x)$ allein wird.)

b) wenn bei Charakteristik p die Exponenten aller in $p(x, \lambda)$ wirklich auftretenden x_i-Potenzen durchweg durch p teilbar sind $(i = 1, \ldots, n)$.

Wir wollen die in a) und b) charakterisierten Fälle kurz als die *trivialen Ausnahmefälle* bezeichnen. Der Bertinische Satz kann dann einfach so formuliert werden:

Ist $p(x, \lambda)$ in den λ_i linear, — $p(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x)$ —, so gibt es, von den trivialen Ausnahmefällen abgesehen, keine Ausnahmepolynome [4]).

Für den Fall der Charakteristik 0 wurden algebraische Beweise des Bertinischen Satzes von *Lüroth*, *Netto*, *Salomon*, *Riehle* angegeben [1]). Ein im Grundgedanken besonders eleganter Beweis wurde um 1915 von *Stickelberger* gefunden, aber damals nicht veröffentlicht. Die diesbezüglichen Untersuchungen, die sich im Nachlaß vorfanden, sind 1936 in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie erschienen [1]). — In **3.** und **4.** geben wir eine knappe und vereinfachte Darstellung des Stickelbergerschen Beweises, bei der auch der Fall der Charakteristik p berücksichtigt wird. In **5.** beschäftigten wir uns mit einer von Salomon stammenden, auf den Fall eines einzigen Parameters $\lambda = \lambda_1$ bezüglichen Verallgemeinerung. In **6.** geben wir schließlich einen zweiten Beweis des Bertinischen Satzes, der durch die Eigenart des benützten Induktionsschlusses methodisch bemerkenswert ist.

2. Reduzibilitätssysteme.

Mit $\mathfrak{R}_\lambda$ bezeichnen wir den *Parameterkörper* $\mathsf{K}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, der aus dem algebraisch abgeschlossenen Ausgangskörper K durch Adjunktion von $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$

---

[3]) In der in Anm. 1 zusammengestellten Literatur werden die Begriffe „Ausnahmepolynom" und „absolut reduzibel" stillschweigend identifiziert. Oder genauer ausgedrückt: In der geometrischen Fassung des Bertinischen Satzes ist von Ausnahmepolynomen die Rede, während bei den algebraischen Beweisen von vornherein absolut reduzible Polynome betrachtet werden.

[4]) In der ursprünglichen geometrischen, natürlich auf Charakteristik 0 beschränkten Fassung lautet der Bertinische Satz: *Wenn jede Funktion eines linearen Systems von ganzen rationalen Funktionen zerfällt, so hat sie entweder einen allen Funktionen des Systems gemeinsamen Faktor oder zerfällt in Funktionen, die alle demselben Büschel angehören.* Für die algebraische Würdigung des Satzes scheint mir aber die Einordnung in den Gedankenkreis der Irreduzibilitätstheorie und die Hervorhebung der Tatsache, daß es sich um eine „Einzigkeitsaussage" handelt, von wesentlicher Bedeutung zu sein.

entsteht, $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ sei der zu $\mathfrak{R}_\lambda$ gehörige algebraisch abgeschlossene Körper. Unter $p(x), \varphi(x), \ldots$ bzw. $p(x, \lambda), \varphi(x, \lambda), \ldots$ bzw. $\tilde{p}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \lambda), \ldots$ verstehen wir *Polynome* in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus K bzw. $\mathfrak{R}_\lambda$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$. Das Potenzprodukt $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ heißt *höher* als das Potenzprodukt $x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$, wenn die erste nichtverschwindende unter den Differenzen $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n$ positiv ist. Ist $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ das höchste in $p(x)$ wirklich auftretende Potenzprodukt, so schreiben wir $p(x)$ die *Höhe* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zu; unter dem *Grad* dagegen verstehen wir wie üblich das Maximum der Exponentensummen der in $p(x)$ wirklich auftretenden Potenzprodukte. $p(x)$ heißt *normiert*, wenn der Koeffizient des höchsten wirklich auftretenden Potenzproduktes gleich 1 ist. (Genau so bei $p(x, \lambda)$ bzw. $\tilde{p}(x, \lambda)$!)

Es sei nun $p(x, \lambda)$ ein bestimmtes Polynom über $\mathfrak{R}_\lambda$ vom Grade m und von der Höhe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Wir nehmen $p(x, \lambda)$ normiert an, was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, lassen aber dafür (etwas anders als in **1.** bei der Formulierung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes) beliebige rationale Funktionen und nicht nur Polynome der λ_i als Koeffizienten zu. *Zulässige* Parameterspezialisierungen $\lambda_i = \eta_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ sind dann solche, bei denen kein λ-Nenner verschwindet. — Wir denken uns zunächst eine bestimmte Zerlegung $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = (x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}) \cdot (x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n})$ des Potenzproduktes $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ festgelegt und fragen nur nach solchen Zerlegungen des Polynoms $p(x, \lambda)$ bzw. der spezialisierten Polynome $p(x, \eta)$, bei denen der eine Faktor die Höhe $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, der andere die Höhe $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ besitzt.

Es sei $q(x, u)$ bzw. $r(x, v)$ das *allgemeine* Polynom [5]) vom Grad $m - (\gamma_1 + \cdots + \gamma_n)$ bzw. $m - (\beta_1 + \cdots + \beta_n)$ und der Höhe $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ bzw. $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ mit den unbestimmten Koeffizienten $u_0, u_1, \ldots$ bzw. $v_0, v_1, \ldots$; insbesondere bedeute u_0 bzw. v_0 den Koeffizienten von $x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ bzw. $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ in $q(x, u)$ bzw. $r(x, v)$. Dann betrachten wir das Gleichungssystem

$$F_1(u, v; \lambda) = \cdots = F_\varrho(u, v; \lambda) = 0 \tag{1}$$

für die „Unbekannten" u_i, v_i, das entsteht, wenn man alle Koeffizienten des x-Polynoms $u_0 v_0\, p(x, \lambda) - q(x, u)\, r(x, v)$ gleich 0 setzt. — Wir behaupten:

Das Gleichungssystem (1) *bzw. das durch die zulässige Parameterspezialisierung* $\lambda_i = \eta_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ *aus* (1) *entstehende Gleichungssystem*

$$F_1(u, v; \eta) = \cdots = F_\varrho(u, v; \eta) = 0 \tag{2}$$

hat dann und nur dann in $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ *bzw.* K *eine nichttriviale Lösung* $u_0 = \xi_0, u_1 = \xi_1, \ldots,$ $v_0 = \zeta_0, v_1 = \zeta_1, \ldots,$ *bei der weder alle* ξ_i *noch alle* ζ_i *verschwinden, wenn die Gleichung*

$$p(x, \lambda) = (\xi_0 \zeta_0)^{-1}\, q(x, \xi)\, r(x, \zeta) \quad \textit{bzw.} \quad p(x, \eta) = (\xi_0 \zeta_0)^{-1}\, q(x, \xi)\, r(x, \zeta)$$

gilt.

Zum Beweise hat man sich angesichts der Art, wie die Systeme (1) und (2) definiert wurden, nur zu überlegen: Ist $u_i = \xi_i$, $v_i = \zeta_i$ irgendeine Lösung mit $\xi_0 \zeta_0 = 0$, so wird notwendig $q(x, \xi) r(x, \zeta) = 0$, und daraus folgt sofort, daß entweder alle ξ_i oder alle ζ_i gleich 0 sein müssen. Bei jeder nichttrivialen Lösung ist also $\xi_0 \zeta_0 \neq 0$.

Da das System (1) in den beiden Unbekanntenreihen $u_0, u_1, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots$ homogen ist, existiert nach van der Waerden [6]) ein zugehöriges *Resultantensystem*, d. h.

---

[5]) Ein „allgemeines" Polynom ist dadurch ausgezeichnet, daß alle von 0 verschiedenen Koeffizienten Unbestimmte sind, und daß außerdem alle (bei vorgeschriebenem Grad und vorgeschriebener Höhe) in Betracht kommenden Potenzprodukte wirklich auftreten.

[6]) B. L. van der Waarden, Ein algebraisches Kriterium für die Auflösbarkeit eines homogenen Gleichungssystems, Proc. Kon. Acad. Amsterdam **29** (1926), S. 142—149. — Moderne Algebra **2**, § 76.

ein — mit endlich vielen Schritten berechenbares — System von ganzzahligen Polynomen[7]) $P_1, \ldots, P_\sigma$ in den Koeffizienten von $F_1(u, v; \lambda), \ldots, F_\varrho(u, v; \lambda)$ mit der folgenden Eigenschaft: Verschwinden $P_1, \ldots, P_\sigma$ bei Einsetzung der Koeffizientenwerte identisch in den λ_i, so ist (1) und ebenso jedes zulässig spezialisierte Gleichungssystem (2) nichttrivial lösbar. Ergeben sich aber für $P_1, \ldots, P_\sigma$ nicht durchweg verschwindende rationale Funktionen der λ_i:

$$P_1 = P_1(\lambda), \ldots, P_\sigma = P_\sigma(\lambda), \tag{3}$$

so besitzt (1) keine nichttriviale Lösung, und das spezialisierte System (2) ist dann und nur dann nichttrivial lösbar, wenn die zulässig spezialisierten Koeffizienten den Gleichungen $P_1(\eta) = \cdots = P_\sigma(\eta) = 0$ genügen.

Stellen wir unsere, bisher auf eine bestimmte Zerlegung von $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ bezogene Betrachtungen für alle möglichen Zerlegungen an, wobei etwa ω die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten bedeuten möge, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Entweder man stößt einmal auf ein Gleichungssystem mit identisch verschwindendem Resultantensystem, dann ist $p(x, \lambda)$ über $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ und (für jede zulässige Parameterspezialisierung) $p(x, \eta)$ über K *in Faktoren niedrigerer Höhe zerlegbar, d. h. es ist $p(x, \lambda)$ gleichzeitig absolut reduzibel und Ausnahmepolynom.*

Oder aber, es besitzt jedes der ω entstehenden Gleichungssysteme

$$F_1^{(i)}(u, v; \lambda) = \cdots = F_{\varrho_i}^{(i)}(u, v, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \omega) \tag{1i}$$

ein nicht identisch verschwindendes Resultantensystem

$$P_1^{(i)} = P_1^{(i)}(\lambda), \ldots, P_{\sigma_i}^{(i)} = P_{\sigma_i}^{(i)}(\lambda). \tag{3i}$$

Dann ist $p(x, \lambda)$ absolut irreduzibel[8]) *und kein Ausnahmepolynom.* Denn es wird $p(x, \eta)$ nur bei *den* zulässigen Parameterspezialisierungen reduzibel, die für mindestens ein i den Gleichungen $P_1^{(i)}(\eta) = \cdots = P_{\sigma_i}^{(i)}(\eta) = 0$ genügen. Damit sind die in **1.** über das allgemeine Irreduzibilitätsproblem aufgestellten Behauptungen in verschärfter Fassung bewiesen. Die Systeme (3i) ($i = 1, \ldots, \omega$) leisten zusammen genau so viel wie die von E. Noether[2]) eingeführte Irreduzibilitätsform. Man kann etwa von einer *vollen Serie zu $p(x, \lambda)$ gehöriger Reduzibilitätssysteme* sprechen.

Im Falle *einer* Variabeln ist, wie bereits in **1.** hervorgehoben, $p(x, \lambda)$ stets absolut reduzibel. Bei mehr als einer Variabeln dagegen kann man zu jeder beliebig vorgeschriebenen Höhe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sofort ein absolut irreduzibles Polynom $I(x)$ von der Höhe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und vom Grade $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ angeben. (Z. B. $I(x) = x_1^{\alpha_1} + x_2$, falls $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$; $I(x) = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n - 1}(x_n + 1)) + 1$, falls $\alpha_1 < m$, $\alpha_n > 0$). Daraus folgt weiter, daß ein *allgemeines* Polynom von beliebigem Grad und beliebiger Höhe stets absolut irreduzibel ist[9]).

Es sei nun $p(x, \lambda)$ ein absolut reduzibles Polynom von der Höhe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, und zwar sei $p(x, \lambda)$ über $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ in zwei Faktoren von den Höhen $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ und $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ zerlegbar, so daß das zugehörige Gleichungssystem (1) mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt. Sieht man nun, wie bei zweifach homogenen Gleichungssystemen üblich, zwei nichttriviale Lösungen $u_i = \xi_i$, $v_i = \eta_i$ und $u_i = \xi_i'$, $v_i = \eta_i'$ von (1) als nicht wesentlich verschieden an, wenn die ξ_i zu den ξ_i' und die η_i zu den η_i' pro-

[7]) Also ein Polynom, dessen Koeffizienten ganzzahlige Vielfache des Einheitselements sind.

[8]) „Absolut irreduzibel" heißt natürlich soviel wie „nicht absolut reduzibel" oder „irreduzibel über $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$".

[9]) Vgl. die in Anm. 2) zitierte Noethersche Arbeit, S. 27.

portional sind, so besitzt (1) sicher nur endlich viele wesentlich verschiedene nichttriviale Lösungen, wie einfach aus der Tatsache erschlossen werden kann, daß sich $p(x, \lambda)$ über $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ nur auf endlich viele wesentlich verschiedene Weisen in Faktoren niedrigerer Höhe zerlegen läßt. Nach van der Waerden [10]) folgt nun aus dieser Tatsache sofort:

Jede nichttriviale Lösung $u_i = \xi_i(\lambda)$, $v_i = \zeta_i(\lambda)$ von (1) geht bei der zulässigen Parameterspezialisierung $\lambda_i = \eta_i$ in eine nichttriviale Lösung $u_i = \xi_i(\eta)$, $v_i = \zeta_i(\eta)$ von (2) über, d. h. *jeder Zerlegung von* $p(x, \lambda)$ *entspricht eine Zerlegung des zulässig spezialisierten Polynoms* $p(x, \eta)$.

Dagegen sieht man leicht, daß unter Umständen *singuläre* Zerlegungen eines geeigneten $p(x, \eta)$ auftreten können, die sich keineswegs aus einer Zerlegung von $p(x, \lambda)$ herausspezialisieren lassen. Man kann es sogar so einrichten, daß $p(x, \eta)$ eine singuläre Zerlegung $p(x, \eta) = \tilde{q}^*(x, \eta) \cdot \tilde{r}^*(x, \eta)$ besitzt, bei der die Höhen der Faktoren q^* und r^* genau dieselben sind wie die Höhen der Faktoren q und r bei einer geeigneten Zerlegung $p(x, \lambda) = q(x, \lambda) \cdot r(x, \lambda)$.

Z. B. besitzt $p(x, \lambda) = x^4 - y^4 + 2\lambda x^2 + \lambda^2$ im wesentlichen nur eine einzige Zerlegung in Faktoren der Höhe (2, 0), nämlich: $p(x, \lambda) = (x^2 + y^2 + \lambda) \cdot (x^2 - y^2 + \lambda)$. Dagegen tritt bei $p(x, 0) = x^4 - y^4$ neben der Zerlegung $p(x, 0) = (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)$, die aus der Zerlegung von $p(x, \lambda)$ durch die Spezialisierung $\lambda = 0$ entsteht, noch die singuläre Zerlegung $p(x, 0) = (x^2 + (1 + i)\, xy + iy^2) \cdot (x^2 - (1 + i)\, xy + iy^2)$ auf.

Bildet man bei unserem Beispiel das System (1) für die Zerlegung von $p(x, \lambda)$ in zwei Faktoren der Höhe (2, 0), so ist (1) dadurch ausgezeichnet, daß bei unbestimmtem λ nur endlich viele wesentlich verschiedene Lösungen existieren, und daß bei der Spezialisierung $\lambda = 0$ Lösungen auftauchen, die in van der Waerdenscher Ausdrucksweise [10]) die *Multiplizität* 0 besitzen. Das ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil bisher die Lösungen der Multiplizität 0 nur von ad hoc konstruierten Beispielen her bekannt waren, während sich hier zeigt, daß es praktisch wichtige Probleme gibt, bei denen das Auftreten derart „pathologischer" Lösungen aus inneren Gründen von vornherein selbstverständlich ist.

3. Elementare Hilfssätze.

Wir wenden uns von den bisher behandelten allgemeinen Fragen dem speziellen Problem des Bertinischen Satzes zu. Zunächst seien einige Sätze zusammengestellt, die zum Teil in der älteren Literatur einen verhältnismäßig großen Raum einnehmen, bei denen wir uns aber auf die Angabe der Behauptungen beschränken dürfen, da es sich vorwiegend um Dinge handelt, die mühelos der modernen Lehrbuchliteratur entnommen werden können.

Ist $p(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x)$ in den λ_i linear, und enthält der Koeffizient des höchsten in $p(x, \lambda)$ wirklich auftretenden x-Potenzproduktes etwa λ_r wirklich, so kann man stets $a_0, a_1, \ldots, a_r$ ($a_r \neq 0$!) in K so bestimmen, daß

$$\frac{p(x, \lambda)}{a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_r\lambda_r} = q(x, \mu) = g_0(x) + \mu_1 g_1(x) + \cdots + \mu_r g_r(x)$$

in den Parametern

$$\mu_i = \frac{\lambda_{i-1}}{a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_r\lambda_r} \qquad (i = 1, \ldots, r;\ \lambda_0 = 1)$$

---

[10]) Vgl. van der Waerden, Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Annalen **97** (1927), S. 756—774.

linear und als x-Polynom normiert ist. Dabei ist offenbar $\mathfrak{R}_\lambda = \mathsf{K}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \mathsf{K}(\mu_1, \ldots \mu_r)$, und es ist $q(x, \mu)$ stets gleichzeitig mit $p(x, \lambda)$ absolut reduzibel und umgekehrt. — *Diese Bemerkungen zeigen, daß beim Bertinischen Satz unbedenklich $p(x, \lambda)$ normiert angenommen werden darf* [11]).

Es sei $\mathfrak{S}_\lambda$ der zwischen $\mathfrak{R}_\lambda$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ liegende Körper aller über $\mathfrak{R}_\lambda$ separablen Elemente [12]), $\tilde{I}_1(x, \lambda) = \tilde{I}(x, \lambda)$ sei ein über $\mathfrak{S}_\lambda$ irreduzibler Faktor des über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduziblen Polynoms $P(x, \lambda)$. Sind dann $\tilde{I}_1(x, \lambda), \ldots, \tilde{I}_s(x, \lambda)$ die sämtlichen verschiedenen, hinsichtlich $\mathfrak{R}_\lambda$ zu $\tilde{I}(x, \lambda)$ konjugierten Polynome, so wird $Q(x, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{s} \tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ ein über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduzibler Polynomfaktor von $P(x, \lambda)$ und es gilt infolgedessen eine Gleichung $P(x, \lambda) = c_\lambda Q(x, \lambda)$, wobei c_λ ein Element aus $\mathfrak{R}_\lambda$ bedeutet. Sind insbesondere $P(x, \lambda)$ und $\tilde{I}(x, \lambda)$ normiert, so wird $c_\lambda = 1$, $P(x, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{s} \tilde{I}_\nu(x, \lambda)$. — Hat ferner $\tilde{I}(x, \lambda)$ die Gestalt $\varphi(x) + \varrho_1 \psi(x)$, so wird $\tilde{I}_\nu(x, \lambda) = \varphi(x) + \varrho_\nu \psi(x)$, wobei die Elemente $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ eine Konjugiertenserie aus $\tilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ hinsichtlich $\mathfrak{R}_\lambda$ bilden, und es stellt $P(x, \lambda)$ eine homogene Binärform s-ten Grades in $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ über $\mathfrak{R}_\lambda$ dar.

Wird schließlich etwa $\tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ über $\tilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ reduzibel, so muß K die Charakteristik p besitzen, und es gilt eine Gleichung $\tilde{I}(x, \lambda) = \tilde{c}_\lambda(\tilde{K}(x, \lambda))^\pi$, wobei $\tilde{c}_\lambda$ ein Element aus $\tilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ und π eine positive Potenz von p bedeutet. Es sind daher bei $\tilde{I}(x, \lambda) = \tilde{I}_1(x, \lambda)$ die Exponenten aller wirklich auftretenden Potenzprodukte durchweg Vielfache von p und das Gleiche muß aus Isomorphiegründen für $\tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ $(\nu = 2, \ldots, s)$ und damit auch für $P(x, \lambda) = c_\lambda \prod_{\nu=1}^{s} \tilde{I}(x, \lambda)$ gelten. D. h. aber: Bei einem über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduziblen Polynom $P(x, \lambda)$, für das nicht der triviale Ausnahmefall b) von 1. vorliegt, stimmt die Zerlegung über $\tilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ mit der Zerlegung über $\tilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ völlig überein.

Faßt man die Betrachtungen von 2. zusammen, so erkennt man sofort, daß zum Beweis des vollen Bertinischen Satzes nur noch die folgende Behauptung bewiesen werden muß:

Es sei $p(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x)$ ein normiertes, über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduzibles Polynom [13]), *das über $\tilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ reduzibel wird. Dann hat ein normierter, über $\tilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ irreduzibler Faktor von $p(x, \lambda)$ die Gestalt $\tilde{I}(x, \lambda) = \varphi(x) + \varrho\psi(x)$.*

4. Der Stickelbergersche Beweis.

Charakteristisch für den Stickelbergerschen Beweis ist die geschickte Benutzung eines klassischen Kroneckerschen Hilfssatzes. — Es seien $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, s)$ Polynome mit vorerst unbestimmt gedachten Koeffizienten $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$: die Koeffizienten des Produktes $b(x) = a_1(x)\, a_2(x) \cdots a_s(x)$ mögen mit $b_1, b_2, \ldots$ bezeichnet werden. Unter einer *Multilinearform* $m(a)$ verstehen wir ein ganzzahliges Polynom in den a_{ik}, das in den s Reihen $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$. $(i = 1, \ldots, s)$ linear und homogen ist. Dann lautet der in Frage stehende

[11]) Vgl. Salomon, S. 226.

[12]) „Separabel" bedeutet nach van der Waerden (Moderne Algebra 1) soviel wie „algebraisch von erster Art" im Sinne von Steinitz. Bei Charakteristik 0 fallen $\mathfrak{S}_\lambda$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ zusammen.

[13]) $p(x, \lambda)$ ist dann und nur dann über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduzibel, wenn $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_r(x)$ keinen gemeinsamen nichttrivialen Polynomfaktor besitzen.

Satz von Kronecker. Jede Multilinearform $m(a)$ genügt einer algebraischen Gleichung

$$m^r + A_1 m^{r-1} + \cdots + A_r = 0,$$

bei der A_i jeweils eine homogene Form i-ten Grades in $b_1, b_2, \ldots$ mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten (bzw., bei Charakteristik p, mit Koeffizienten aus dem Primkörper) darstellt.

Folgerung. Sind die Koeffizienten b_i von $b(x) = b(x, \lambda)$ Polynome aus $\mathfrak{R}_\lambda$, und zwar höchstens vom Grade γ_i in λ_i $(i = 1, \ldots, r)$, so ist auch jede zu $\mathfrak{R}_\lambda$ gehörige Multilinearform $m(a)$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}_\lambda$, das in λ_i höchstens den Grad γ_i besitzt.

Hinsichtlich des Beweises des Kroneckerschen Satzes kann auf die Literatur verwiesen werden [14]). Die Folgerung ergibt sich mühelos aus trivialen Gradbetrachtungen und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung im Polynomring mit Körperkoeffizienten [15]).

Es sei jetzt $p(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x)$ $(f_i(x) \not\equiv 0 \ \ (i = 1, \ldots, r))$ normiert und über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduzibel, $p(x, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{s} \tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ $(s \geqq 2)$ die Zerlegung von $p(x, \lambda)$ in normierte, über $\widetilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ irreduzible Faktoren. Mit $\mathfrak{L}_\lambda$ bezeichnen wir den Körper, der aus $\mathfrak{R}_\lambda$ durch Adjunktion aller Koeffizienten von $\tilde{I}_1(x, \lambda) = \tilde{I}$ entsteht, $\mathfrak{R}_{x\lambda}$ bzw. $\mathfrak{L}_{x\lambda}$ bedeute den durch Hinzunahme von $x_1, \ldots, x_n$ erweiterten Körper $\mathfrak{R}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{L}_\lambda$. — Bilden wir nun mit einer neuen Unbestimmten u das Polynom

$$(4) \quad E(u; x, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{s} (u - \tilde{I}_\nu(x, \lambda)) = u^s + B_1(x, \lambda)\, u^{s-1} + \cdots + B_s(x, \lambda),$$

so sind die Koeffizienten $B_i(x, \lambda)$ Polynome über $\mathfrak{R}_\lambda$; es wird insbesondere

$$(5) \quad B_s(x, \lambda) = (-1)^s \cdot \prod_{\nu=1}^{s} \tilde{I}_\nu(x, \lambda) = (-1)^s (f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x),$$

und aus der oben genannten Folgerung ergibt sich sofort, daß alle $B_i(x, \lambda)$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ linear sein müssen:

$$(6) \quad B_i(x, \lambda) = b_{i0}(x) + \lambda_1 b_{i1}(x) + \cdots + \lambda_r b_{ir}(x)$$

Weil nämlich bei jedem $\tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ mindestens ein Koeffizient gleich 1 ist, sind die Koeffizienten der x-Polynome $B_i(x, \lambda)$ durchweg Multilinearformen in den Koeffizienten von $a_1(x) = \tilde{I}_1(x, \lambda), \ldots, a_s(x) = \tilde{I}_s(x, \lambda)$.

Nach elementaren algebraischen Überlegungen ist $\tilde{I}$ primitives Element von $\mathfrak{L}_{x\lambda}$ über $\mathfrak{R}_{x\lambda}$, es wird also $\mathfrak{L}_{x\lambda} = \mathfrak{R}_{x\lambda}(\tilde{I})$. Andererseits ist $E(\tilde{I}; x, \lambda) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der $\tilde{I}(x, \lambda)$ über $\mathfrak{R}_{x\lambda}$ genügt, aus $b_{si}(x) = (-1)^s f_i(x) \not\equiv 0$ folgt daher sofort:

---

[14]) L. Kronecker, Zur Theorie der Formen höherer Stufen, Sitz.Ber. Berliner Akad. Wiss. 1883, S. 957.
J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen (Teubner, Leipzig, 1903), Abschn. III, § 5—7.
H. Prüfer, Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern, J. f. Math. **168** (1932), S. 1—36, insbesondere S. 24 u. S. 15/16. (Bei Prüfer ist der Satz zwar nicht in der von uns benötigten Form ausgesprochen. Aber der wohl einfachste Beweis kann aus den angegebenen Stellen herauspräpariert werden.)

[15]) Die folgende Herleitung der für den Stickelbergerschen Beweis grundlegenden Formel (12) mit Hilfe der im Text genannten Folgerung fand sich in einer brieflichen Mitteilung von Riehle an Stickelberger (allerdings nicht in der Ausdrucksweise der modernen Körpertheorie, und mit einem kleinen Versehen, indem an Stelle der Ungleichungen (10) einfach $f_i(\xi) \not\equiv 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ gefordert wurde). Die (gleichfalls auf den Kroneckerschen Satz gestützte) Ableitung der Formel (12) bei Stickelberger selbst scheint mir weniger durchsichtig zu sein.

$$b_{1i}(x)\,\tilde{I}^{s-1} + b_{2i}(x)\,\tilde{I}^{s-2} + \cdots + b_{si}(x) \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{7}$$

$$-\lambda_i = \frac{\tilde{I}^s + C_{1i}(x, \lambda)\,\tilde{I}^{s-1} + \cdots + C_{si}(x, \lambda)}{b_{1i}(x)\,\tilde{I}^{s-1} + \cdots + b_{si}(x)} \tag{8}$$

$$(C_k(x, \lambda) = B_k(x, \lambda) - \lambda_i b_{ki}(x) \quad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, s)).$$

Wir zeichnen nun den Parameter λ_r aus und setzen $\mathfrak{R}'_\lambda = \mathsf{K}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})$, $\mathfrak{R}'_{\lambda x} = \mathfrak{R}'_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$. Aus (8) und $\mathfrak{L}_{x\lambda} = \mathfrak{R}_{x\lambda}(\tilde{I})$ ergibt sich dann, daß $\mathfrak{L}_{x\lambda} = \mathfrak{R}'_{x\lambda}(\tilde{I})$ rein transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}'_{x\lambda}$ durch $\tilde{I}$ sein muß. — Es seien ferner die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_n$ aus K so gewählt, daß die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\tilde{I}_\nu(\xi, \lambda) \neq \tilde{I}_\mu(\xi, \lambda) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, s;\ \nu \neq \mu). \tag{9}$$

$$b_{1i}(\xi) \cdot \tilde{I}_1^{s-1}(\xi, \lambda) + b_{2i}(\xi) \cdot \tilde{I}_1^{s-2}(\xi, \lambda) + \cdots + b_{si}(\xi) \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{10}$$

Setzen wir dann noch $\varrho = \tilde{I}_1(\xi, \lambda)$, so ist zunächst wegen (9) sicher ϱ primitives Element von $\mathfrak{L}_{x\lambda}$ über $\mathfrak{R}_{x\lambda}$, und aus $E(\tilde{I}_1(x, \lambda);\ x, \lambda) = 0$ und (10) folgt sofort:

$$E(\varrho;\ \xi, \lambda) = 0;\ \ \lambda_r = \frac{\varrho^s + C_{1r}(\xi, \lambda)\,\varrho^{s-1} + \cdots + C_{sr}(\xi, \lambda)}{b_{1r}(\xi)\,\varrho^{s-1} + \cdots + b_{sr}(\xi)}. \tag{11}$$

Auf Grund von (11) und $\mathfrak{L}_{x\lambda} = \mathfrak{R}_{x\lambda}(\varrho)$ erweist sich aber $\mathfrak{L}_{x\lambda}$ als rein transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}'_{x\lambda}$ durch ϱ, man hat also:

$$\mathfrak{L}_{x\lambda} = \mathfrak{R}'_{x\lambda}(\tilde{I}) = \mathfrak{R}'_{x\lambda}(\varrho)\,, \tag{12}$$

und aus (12) ergibt sich bekanntlich, daß $\tilde{I}$ *eine linear gebrochene Funktion von* ϱ *über* $\mathfrak{R}'_{x\lambda}$ ist. Richtet man außerdem, was offenbar möglich ist, die Darstellung von $\tilde{I}$ durch ϱ so ein, daß die Koeffizienten in Zähler und Nenner Polynome in den x_i über $\mathfrak{R}'_\lambda$ ohne gemeinsamen nichttrivialen Polynomfaktor sind, so wird

$$\tilde{I}(x, \lambda) = \frac{a'(x, \lambda) + b'(x, \lambda)\,\varrho}{c'(\lambda) + d'(\lambda)\,\varrho}, \tag{13}$$

wobei $c'(\lambda)$ und $d'(\lambda)$ wegen des Fehlens eines x-Nenners auf der linken Seite Elemente aus $\mathfrak{R}'_\lambda$ sein müssen. Aus

$$\tilde{I}(\xi, \lambda) = \varrho = \frac{a'(\xi, \lambda) + b'(\xi, \lambda)\,\varrho}{c'(\lambda) + d'(\lambda)\,\varrho}$$

folgt weiter, daß sicher $d'(\lambda) = 0$ ist, während $c'(\lambda) = 1$ angenommen werden darf. Man hat also

$$\tilde{I}(x, \lambda) = a'(x, \lambda) + b'(x, \lambda)\,\varrho\,, \tag{14}$$

wobei $a'(x, \lambda)$ und $b'(x, \lambda)$ von λ_r unabhängig sind. In gleicher Weise erhält man aber für $i = 1, \ldots, r-1$ jeweils eine Darstellung

$$\tilde{I}(x, \lambda) = a''(x, \lambda) + b''(x, \lambda)\,\varrho\,, \tag{15}$$

bei der λ_i in $a''(\lambda)$ und $b''(\lambda)$ nicht auftritt. Wäre nun einmal $b'(x, \lambda) \neq b''(x, \lambda)$, so wäre $\varrho = \dfrac{a'(x, \lambda) - a''(x, \lambda)}{b''(x, \lambda) - b'(x, \lambda)}$ Element von $\mathfrak{R}_\lambda$, d. h. es wäre $\mathfrak{L}_\lambda = \mathfrak{R}_\lambda$, was unter unsern Voraussetzungen ausgeschlossen ist. Daher muß stets

$$b'(x, \lambda) = b''(x, \lambda), \quad a'(x, \lambda) = a''(x, \lambda)$$

sein, d. h. es sind $a'(x, \lambda) = \varphi(x)$ und $b'(x, \lambda) = \psi(x)$ Polynome über K. Fertig!

5. Der Satz von Salomon.

Es sei $P(x, \lambda)$ ein über $\mathfrak{R}_\lambda$ irreduzibles Polynom mit einem einzigen Parameter $\lambda_1 = \lambda$, das über $\widetilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ reduzibel wird. Hat dann $P(x, \lambda)$ in λ den Grad γ, so kann man stets höchstens $\gamma + 1$ Polynome $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_\mu(x)$ $(\mu \leqq \gamma)$ so bestimmen, daß jeder normierte, über $\widetilde{\mathfrak{S}}_\lambda$ irreduzible Faktor $\tilde{I}(x, \lambda)$ von $P(x, \lambda)$ die Gestalt $\varphi_0(x) + \varrho_1\varphi_1(x) + \cdots + \varrho_\mu\varphi_\mu(x)$ besitzt [16]).

Zum Beweis bestimmen wir $\mu + 1$ über K linear unabhängige Koeffizienten $\varrho_0 = 1, \varrho_1, \ldots, \varrho_\mu$ von $\tilde{I}(x, \lambda)$ so, daß jeder weitere Koeffizient linear über K durch $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_\mu$ ausgedrückt werden kann. Dann besitzt $\tilde{I}(x, \lambda)$ eine eindeutig bestimmte Darstellung $\tilde{I}(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \varrho_1\varphi_1(x) + \cdots + \varrho_\mu\varphi_\mu(x)$, und es wird

$$(16) \qquad P(x, \lambda) = h(\lambda) \prod_{\nu=1}^{s} \tilde{I}_\nu(x, \lambda) = h(\lambda) \prod_{\nu=1}^{s} (\varphi_0(x) + \varrho_{\nu 1}\varphi_1(x) + \cdots + \varrho_{\nu\mu}\varphi_\mu(x)),$$

falls $\tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ $(\nu = 2, \ldots, s)$ die sämtlichen verschiedenen Konjugierten von $\tilde{I}_1(x, \lambda) = \tilde{I}(x, \lambda)$ hinsichtlich $\mathfrak{R}_\lambda$ bedeuten $(\varrho_{1i} = \varrho_i$ $(i = 1, \ldots, \mu))$. Das Auftreten des Faktors $h(\lambda)$, der wegen der Normiertheit der $\tilde{I}_\nu(x, \lambda)$ ein Polynom in λ über K darstellt, rührt daher, daß $P(x, \lambda)$ nicht normiert zu sein braucht. — Um nun $\mu \leqq \gamma$ zu beweisen, bilden wir mit neuen Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots, u_\mu$ das Produkt

$$(17) \qquad \Phi(u, \lambda) = h(\lambda) \prod_{\nu=1}^{s} (u_0 + \varrho_{\nu 1}u_1 + \cdots + \varrho_{\nu\mu}u_\mu)$$

$\Phi(u, \lambda)$ ist ein Polynom über $\mathfrak{R}_\lambda$, denn es sind offenbar $u_0 + \varrho_{\nu 1}\, u_1 + \cdots + \varrho_{\nu\mu}u_\mu$ $(\nu = 2, \ldots, s)$ die sämtlichen verschiedenen Konjugierten von $u_0 + \varrho_{11}u_1 + \cdots + \varrho_{1\mu}u_\mu$ hinsichtlich $\mathfrak{R}_\lambda$. Die Koeffizienten von $\Phi(u, \lambda)$ sind Multilinearformen in den Koeffizienten von $a_0(x) = h(\lambda), a_1(x) = \tilde{I}_1(x, \lambda), \ldots, a_s(x) = \tilde{I}_s(x, \lambda)$. Nach der Folgerung aus dem Kroneckerschen Satz muß daher $\Phi(u, \lambda)$ ein Polynom höchstens γ-ten Grades in λ sein:

$$(18) \qquad \Phi(u, \lambda) = \Phi_0(u)\, \lambda^\gamma + \Phi_1(u)\, \lambda^{\gamma-1} + \cdots + \Phi_\gamma(u).$$

Dabei sind in (17) die Koeffizienten $\Phi_i(u)$ offenbar homogene Funktionen s-ten Grades in $u_0, u_1, \ldots, u_\mu$ über K.

Wäre nun $\mu > \gamma$, so hätte nach bekannten algebraischen Sätzen das Gleichungssystem

$$(19) \qquad \Phi_0(u) = \Phi_1(u) = \cdots = \Phi_\gamma(u) = 0$$

in K eine nichttriviale Lösung $u_i = \xi_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \mu)$ [17]). Man hätte also $\Phi(\xi, \lambda) = 0$, und daraus folgte wegen $h(\lambda) \not\equiv 0$ sofort $\xi_0 + \xi_1\varrho_{i1} + \cdots + \xi_\mu\varrho_{i\mu} = 0$ für mindestens ein i. Wegen der Konjugiertheit der Linearformen $u_0 + \varrho_{\nu 1}\, u_1 + \cdots + \varrho_{\nu\mu}u_\mu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ hinsichtlich $\mathfrak{R}_\lambda$ müßte dann $\xi_0 + \varrho_{\nu 1}\xi_1 + \cdots + \varrho_{\nu\mu}\xi_\mu = 0$ sein für jedes ν, und das ist ausgeschlossen, weil $1, \varrho_1 = \varrho_{11}, \ldots, \varrho_\mu = \varrho_{1\mu}$ von vornherein über K linear unabhängig gewählt wurden. Die Annahme $\mu > \gamma$ erweist sich also als widerspruchsvoll, womit der Satz von Salomon bewiesen ist.

6. Ein zweiter Beweis des Bertinischen Satzes.

Setzt man im Salomonschen Satze $\gamma = 1$, so erhält man den Bertinischen Sats für den Fall eines einzigen Parameters $(r = 1)$. Um den Bertinischen Satz allgemein zu beweisen,

---

[16]) Salomon § 5, 243ff. Der im Text angegebene Beweis stammt von Riehle (S. 14—19), allerdings ist die Darstellung im Text weit gedrängter als im Original.

[17]) Vgl. z. B. van der Waerden, Moderne Algebra **2**, § 76.

hat man dann nur noch zu zeigen, daß er für $r+1$ Parameter richtig ist, falls er für $r \geqq 1$ Parameter gilt.

Es seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu$ Parameter, $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu} = \mathsf{K}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu)$. Unter $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda,\mu}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\mu}$ möge der zu $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ bzw. $\mathsf{K}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ bzw. $\mathsf{K}(\mu)$ gehörige algebraisch abgeschlossene Körper verstanden werden. $p(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x) + \mu f(x)$ bedeute ein in den λ_i und μ lineares, über $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ irreduzibles, absolut reduzibles Polynom, für das nicht der triviale Ausnahmefall b) von **1.** vorliegt.

Dann ist $p(x, \lambda, \mu)$ auch über $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu} \cdot \widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$ und über $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu} \cdot \widetilde{\mathfrak{R}}_{\mu}$ irreduzibel; ersetzen wir daher den Ausgangskörper K durch $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\mu}$, nehmen wir also die Parameter λ_i bzw. μ in den Koeffizientenbereich, so dürfen wir nach Induktionsvoraussetzung auf $p(x, \lambda, \mu) = p(x, \mu)$ bzw. $p(x, \lambda)$ den Bertinischen Satz anwenden. Es sei nun $\tilde{I}(x, \lambda, \mu)$ ein bestimmter normierter über $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda,\mu}$ irreduzibler Faktor von $p(x, \lambda, \mu)$. Dann ergibt sich bei Wahl des Ausgangskörpers $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$ für $\tilde{I}(x, \lambda, \mu)$ die Existenz einer Darstellung

$$\tilde{I}(x, \lambda, \mu) = \varphi(x, \lambda) + \varrho(\lambda, \mu)\, \psi(x, \lambda). \tag{20}$$

Dabei sind $\varphi(x, \lambda)$ und $\psi(x, \lambda)$ Polynome über $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$, und es kann und soll für $\varrho(\lambda, \mu)$ irgendein nicht zu $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$ gehöriger Koeffizient von $\tilde{I}(x, \lambda, \mu)$ gewählt werden. Durch diese Wahl erreicht man, daß nicht nur, wie wegen der Normiertheit selbstverständlich, in $\varphi(x, \lambda)$ ein nicht in $\psi(x, \lambda)$, sondern auch in $\psi(x, \lambda)$ ein nicht in $\varphi(x, \lambda)$ vorkommendes Potenzprodukt mit dem Koeffizienten 1 auftritt. Sind $\varrho_2, \ldots, \varrho_s$ die sämtlichen verschiedenen, zu $\varrho_1 = \varrho(\lambda, \mu)$ hinsichtlich $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda} \cdot \mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ konjugierten Elemente, so wird

$$p(x, \lambda, \mu) = \prod_{\nu=1}^{s} (\varphi(x, \lambda) + \varrho_\nu \psi(x, \lambda)), \tag{21}$$

falls man, wie nach **3.** zulässig, $p(x, \lambda, \mu)$ der Einfachheit halber normiert annimmt. — Ist andererseits $\varphi'(x, \lambda) + \varrho'(\lambda, \mu)\, \psi'(x, \lambda)$ irgendein hinsichtlich $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ zu $\varphi(x, \lambda) + \varrho\, \psi(x, \lambda)$ konjugiertes Polynom, so muß auch $\varphi'(x, \lambda) + \varrho'(\lambda, \mu)\, \psi'(x, \lambda)$ unter den normierten irreduziblen Faktoren von $p(x, \lambda, \mu)$ vorkommen. Das bedeutet aber nach (21) für geeignetes ν die Gültigkeit einer Gleichung

$$\varphi'(x, \lambda) + \varrho'(\lambda, \mu)\, \psi'(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \varrho_\nu\, \psi(x, \lambda), \tag{22}$$

und nach dem, was wir über das Aussehen von $\varphi(x, \lambda)$ und $\psi(x, \lambda)$ wissen, folgt aus (22) sofort

$$\varrho'(\lambda, \mu) = \varrho_\nu; \quad \varphi'(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda); \quad \psi'(x, \lambda) = \psi(x, \lambda).$$

D. h. aber, $\varphi(x, \lambda)$ und $\psi(x, \lambda)$ sind über $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ nur zu sich selbst konjugiert, und da wir für $p(x, \lambda, \mu)$ den trivialen Ausnahmefall b) ausgeschlossen haben, folgt daraus nach **3.** sofort, daß $\varphi(x, \lambda)$ und $\psi(x, \lambda)$ *in den λ_i rational* sein müssen[18]). Gleichzeitig ergibt sich, daß $\varrho(\lambda, \mu)$ *sicher nicht zu $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\mu}$ gehören kann*, weil sonst $p(x, \lambda, \mu)$ über $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\mu}$ in mehrere, in den λ_i rationale Faktoren zerfiele, was ausgeschlossen ist.

Wählt man nun $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\mu}$ statt $\widetilde{\mathfrak{R}}_{\lambda}$ als Ausgangskörper, so erhält man unter besonderer Berücksichtigung des zuletzt gewonnenen Resultats durch genau die gleichen Schlüsse wie oben für $\tilde{I}(x, \lambda, \mu)$ eine Darstellung

$$\tilde{I}(x, \lambda, \mu) = \varphi_1(x, \mu) + \varrho(\lambda, \mu)\, \psi_1(x, \mu), \tag{23}$$

[18]) Der Abbildungsschluß, mit dem der rationale Charakter von φ und ψ in den λ_i bewiesen wird, bildet den Kern des Induktionsbeweises.

bei der $\varrho(\lambda, \mu)$ dasselbe Element ist, wie in (17) und $\varphi_1(x, \mu)$ und $\psi_1(x, \mu)$ in μ rational sind. Wäre nun $\psi(x, \lambda) \neq \psi_1(x, \mu)$, so wäre

$$\varrho(\lambda, \mu) = \frac{\varphi_1(x, \mu) - \varphi(x, \lambda)}{\psi(x, \lambda) - \psi_1(x, \mu)}$$

und damit auch $\tilde{I}(x, \lambda, \mu)$ in den λ_i und in μ rational, was nicht sein kann. Es muß also notwendig $\varphi(x, \lambda) = \varphi_1(x, \mu)$; $\psi(x, \lambda) = \psi_1(x, \mu)$ sein, d. h. $\varphi(x, \lambda) = \varphi(x)$ und $\psi(x, \lambda) = \psi(x)$ sind von allen Parametern unabhängige Polynome über K. — Der Bertinische Satz gilt also auch für $r + 1$ Parameter und somit allgemein.

Der Salomonsche Satz wurde von Riehle durch den Nachweis verallgemeinert, daß bei Zulassung von $r > 1$ Parametern an Stelle der Salomonschen Schranke $\gamma + 1$ die Schranke $(\gamma_1 \cdots \gamma_r) + 1$ tritt, falls γ_i den Grad von $P(x, \lambda)$ in λ_i bedeutet. Doch arbeitet Riehle nicht rein algebraisch, sondern er benutzt gelegentlich die Stetigkeitseigenschaften des Körpers aller komplexen Zahlen. Außerdem läßt er die Möglichkeit unberücksichtigt, daß ein über $\mathfrak{R}_{\lambda\,\mu}$ irreduzibles Polynom $P(x, \lambda, \mu)$ mit den Parametern λ und μ sowohl über $\widetilde{\mathfrak{R}}_\lambda$ als auch über $\widetilde{\mathfrak{R}}_\mu$ reduzibel wird. (Beispiel: $P(x, \lambda, \mu) = \lambda^2 x^6 - \mu^3$). Aber auch davon abgesehen, scheint mir der Induktionsschluß, mit dem Riehle von r zu $r + 1$ Parametern übergeht, in mehrfacher Hinsicht unklar und bedenklich. — Ein arithmetisch einwandfreier Beweis des Riehleschen Satzes (sofern der Satz überhaupt allgemein gilt), wird sich voraussichtlich auf Überlegungen stützen müssen, wie sie oben beim zweiten Beweis des Bertinischen Satzes dargestellt wurden. Ich beabsichtige, auf die hier anknüpfenden Fragen bei Gelegenheit ausführlich einzugehen.

Eingegangen 22. Oktober 1936.

Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren.

Von *Wilhelm Magnus* in Frankfurt a. M.

P. Hall [1]) hat vor einiger Zeit ein ausgedehntes System von Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren aufgestellt. Im folgenden wird zunächst gezeigt, daß diese Beziehungen völlig beherrscht werden durch die linearen Abhängigkeiten, die zwischen den Elementen eines Ringes bestehen, in dem das assoziative und kommutative Gesetz für die Addition sowie beide distributiven Gesetze gelten, während für die Multiplikation statt des assoziativen und kommutativen Gesetzes die Gesetze

$$\varphi[\psi\chi] + \psi[\chi\varphi] + \chi[\varphi\psi] = 0,$$
$$\varphi\psi + \psi\varphi = 0$$

gelten. Dies kommt durch die Sätze I und III sowie die zum Beweis von III führenden Formeln (12) zum Ausdruck. Satz III ist schon vor Abfassung dieser Arbeit in einfacherer Weise mit anderen Mitteln von O. Grün [2]) bewiesen worden. — Satz II ermöglicht eine kurze Herleitung der von Hall [3]) im dritten Abschnitt seiner Arbeit bewiesenen Identitäten, wie durch Satz IV an einem hinreichend allgemeinen Beispiel gezeigt wird. Satz V gibt einen Überblick über die „im allgemeinen" in einer Gruppe bestehenden Vertauschbarkeitsrelationen, deren „absteigende Zentrenreihe" [s. Abschnitt 2] mit dem Einheitselement schließt.

1. Unter einem *freien Ringe* R von k Erzeugenden x_i $(i = 1, \ldots, k)$ werde folgendes verstanden: Alle Elemente aus R lassen sich durch Addition, Subtraktion und Multiplikation aus den x_i erhalten, und zwei Elemente aus R sind dann und nur dann einander gleich, wenn sie sich auf Grund der Rechengesetze ineinander überführen lassen. Dabei sollen in R das kommutative und assoziative Gesetz für die Addition, beide distributiven Gesetze und das assoziative, aber nicht das kommutative Gesetz für die Multiplikation gelten. Hieraus folgt, daß jedes Element von R eine endliche Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten der Produkte

$$(1) \qquad x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_h}, \qquad i_1, i_2, \ldots, i_h \text{ Zahlen der Reihe } 1, 2, \ldots, k,$$

ist. Zwei Produkte $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ und $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_l}$ sind dabei dann und nur dann einander gleich, wenn $h = l$ und $i_1 = j_1, \ldots, i_l = j_l$ ist. Irgend n verschiedene Produkte (1) sind linear unabhängig; eine Linearkombination von Produkten (1) heiße ein Polynom; als Koeffizienten treten im folgenden ausschließlich ganze Zahlen auf. Die Anzahl h der

---

[1]) P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proceedings of the London Mathematical Society (2) **36** (1934), 29-95. Insbesondere Abschnitt 2.

[2]) O. Grün, Über eine Faktorgruppe freier Gruppen. I, Deutsche Mathematik **1** (1937), 772—782.

[3]) l. c. [1]), insbes. S. 63 u. 73/74.

Faktoren eines Produktes (1) heiße die Dimension des Produkts in den x_i; ein Element y, das eine Linearkombination von Produkten derselben Dimension h ist, heißt homogen in den x_i und von der Dimension h.

Analog zu R sei P ein freier Ring von k Erzeugenden ξ_i $(i = 1, \ldots, k)$, in dem als Rechengesetze für die Addition sowohl das kommutative wie das assoziative Gesetz gelten, in dem ferner die distributiven Gesetze gültig sind, die Multiplikation dagegen weder dem kommutativen noch dem assoziativen Gesetz genügt. Dafür sollen zwischen irgend zwei bzw. drei Elementen φ, ψ bzw. φ, ψ, ω von P die Beziehungen

$$\varphi\psi + \psi\varphi = 0, \quad \varphi[\psi\omega] + \psi[\omega\varphi] + \omega[\varphi\psi] = 0 \tag{2}$$

bestehen. Die Anzahl der Faktoren ξ_i eines Produktes heiße die Dimension des Produktes in den ξ_i oder, da die ξ_i im folgenden vor anderen Elementen von P ausgezeichnet sind, das Gewicht eines Produktes. Aus (2) folgt, daß alle Produkte vom Gewicht h Linearkombinationen (mit ganzzahligen Koeffizienten) der Produkte

$$\xi_{i_1}[\xi_{i_2}[\cdots[\xi_{i_{h-1}}\xi_{i_h}]\cdots]] \tag{3}$$

sind; dieselben mögen *rechts normierte* Produkte heißen, da die sich schließenden eckigen Klammern alle ganz rechts stehen. Die formal verschiedenen rechtsnormierten Produkte sind i. a. nicht linear unabhängig, z. B. ist

$$\xi_1[\xi_2[\xi_1\xi_2]] - \xi_2[\xi_1[\xi_1\xi_2]] = 0\,.$$

Man ordne nun den Elementen von P Elemente von R zu durch die Vorschrift: Den ξ_i werde x_i zugeordnet; sind den Elementen φ und ψ von P die Elemente u und v von R zugeordnet, so seien den Elementen

$$\varphi + \psi, \quad \varphi - \psi, \quad \varphi\psi$$

von P in R die Elemente

$$u + v, \quad u - v, \quad uv - vu$$

zugeordnet. Dann gilt der Satz:

I. *Jedem Element von* P *ist ein und nur ein Element von* R *zugeordnet. Verschiedenen Elementen von* P *sind verschiedene Elemente von* R *zugeordnet.*

Die gegebenen Zuordnungsvorschriften liefern also eine getreue Darstellung von P durch Elemente von R.

Es gilt weiterhin der im folgenden ebenfalls benötigte Satz:

II. *Ist* n *eine beliebige natürliche Zahl und* X_n *der aus den Linearkombinationen der Produkte* n*-ter Dimension in den* x_i *bestehende Modul,* $\{X_n\}$ *die von den Elementen von* X_n *mit der Addition als verknüpfender Operation gebildete Abelsche Gruppe,* D_n *der Teilmodul von* X_n*, der aus allen Elementen von* X_n *besteht, die einem Elemente aus* P *zugeordnet sind,* $\{D_n\}$ *die entsprechende Untergruppe von* $\{X_n\}$*, so enthält die Faktorgruppe* $\{X_n\}/\{D_n\}$ *keine Elemente endlicher Ordnung.*

Nennt man ein Element aus X_n, das einem rechtsnormierten Produkt vom Gewicht n aus P zugeordnet ist, eine n-te Differenz, so wird nach dem bei (3) Bemerkten $\{D_n\}$ von den n-ten Differenzen erzeugt. Sind Δ_ϱ $(\varrho \equiv 1, \ldots, r)$ die Elemente einer Basis von $\{D_n\}$, so läßt sich Satz II auch so aussprechen:

II*. *Ist* $\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \Delta_\varrho$ *ein Polynom aus* X_n*, dessen sämtliche Koeffizienten durch eine Primzahl* p *teilbar sind, so sind auch alle* $c_\varrho \equiv 0 \pmod{p}$.

Der Beweis von Satz II wird geführt durch den Nachweis, daß es zwischen $\{X_n\}$ und $\{D_n\}$ eine Kette von Untergruppen $\{X_n^*\}, \{X_n^{**}\}, \ldots$ gibt, deren jede in der vorhergehenden enthalten ist, deren letzte $\{D_n\}$ ist und die so beschaffen sind, daß die Quotientengruppen zweier aufeinanderfolgenden von diesen Untergruppen keine Elemente endlicher Ordnung enthalten. Dies wird sich beim Beweise von Satz I mitergeben. Zum Beweise von I ist zunächst zu sagen, daß die eine Seite des Satzes — nämlich, daß jedem Element von P genau ein Element von R zugeordnet ist — trivial ist, da den linken Seiten in (2), d. h. den Elementen

$$\varphi\psi + \psi\varphi \quad \text{und} \quad \varphi[\psi\omega] + \psi[\omega\varphi] + \omega[\varphi\psi]$$

aus P stets die Null aus R zugeordnet ist. Dem Beweis des zweiten Teiles von I mögen zunächst drei Hilfssätze vorausgeschickt werden.

Die Elemente y_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ von R mögen algebraisch unabhängig heißen, wenn der von ihnen erzeugte Unterring von R ein freier Ring mit den l Erzeugenden y_λ ist; derselbe heiße $R(y)$. Die y_λ seien homogen in den x_i, ihre Dimensionen in den x_i mögen sämtlich kleiner oder gleich einer festen Zahl n sein. Die Linearkombinationen derjenigen Produkte in den y_λ, deren Dimension in den x_i gleich n ist, bilden einen Modul Y_n, dessen Elemente bei Addition die Gruppe $\{Y_n\}$ bilden. Die y_λ mögen Erzeugende von Y_n heißen. Es sei y_1 eines unter den Elementen y_λ, dessen Dimension d in den x_i kleiner als n ist. Man bilde die Elemente

$$y_\lambda^{(\sigma)} = \sum_{\tau=0}^{\sigma} (-1)^\tau \binom{\sigma}{\tau} y_1^{\sigma-\tau}\, y_\lambda\, y_1^\tau \tag{4}$$

für $\lambda = 2, \ldots, l$ und für alle Werte von σ, für die $y_\lambda^{(\sigma)}$ eine Dimension $\leqq n$ in den x_i besitzt. Die $y_\lambda^{(\sigma)}$ mögen in irgendeiner Reihenfolge mit y_μ^* $(\mu = 1, \ldots, m)$ bezeichnet werden. Dann gilt:

Hilfssatz 1. *Die y_μ^* sind algebraisch unabhängig.*

Hilfssatz 2. *Jedes Element Z von Y_n läßt sich in der Form schreiben*

$$Z = P_0^*\, y_1^t + P_1^*\, y_1^{t-1} + \cdots + P_{t-1}^*\, y_1 + P_t^*, \tag{5}$$

wobei die P_τ^* $(\tau = 0, \ldots, t)$ Polynome (mit ganzzahligen Koeffizienten) in den y_μ^* sind und $t = \left[\frac{n}{d}\right]$ ist. P_0^* kann auch eine ganze Zahl sein. Z ist dann und nur dann gleich Null, wenn alle P_τ^* gleich Null sind.

Die Gesamtheit der Polynome P_t^* bildet einen Modul Y_n^* mit den Erzeugenden y_μ^*. Wir sagen, Y_n^* sei aus Y_n durch Elimination von y_1 entstanden. Für die Gruppe der Elemente von Y_n^* mit der Addition als Verknüpfung gilt offenbar der

Zusatz zu Hilfssatz 2. *Die Quotientengruppe $\{Y_n\}/\{Y_n^*\}$ enthält keine Elemente endlicher Ordnung.*

Denn die Basiselemente von $\{Y_n^*\}$ bilden einen Teil einer Basis von $\{Y_n\}$.

Natürlich läßt sich y_1 auch aus Y_n eliminieren, wenn die Dimension von y_1 in den x_i gleich n ist; dieser Fall wird im folgenden jedoch stets ausgeschlossen. Zur Erklärung der $y_\lambda^{(\sigma)}$ sei bemerkt, daß diese in gewissem Sinn höhere Differenzen sind. Gibt es nämlich in P Elemente $\eta_1, \ldots, \eta_l$, denen die Elemente $y_1, \ldots, y_l$ von R zugeordnet sind, dann ist $y_\lambda^{(\sigma)}$ dem rechtsnormierten Produkt

$$\eta_1[\eta_1[\cdots[\eta_1\,\eta_\lambda]\cdots]]$$

von σ Faktoren η_1 und einem Faktor η_λ zugeordnet.

Beweis von Hilfssatz 1. Wegen der vorausgesetzten algebraischen Unabhängigkeit der y_λ zerfällt jede Beziehung zwischen den y_μ^* sofort in lineare Beziehungen zwischen solchen Produkten der y_μ^*, die in den y_λ dieselbe Dimension haben. Diese Produkte lassen sich weiterhin in Klassen einteilen, indem man jedem Produkt der y_μ^* dasjenige Produkt der $y_2, \ldots, y_l$ zuordnet, das aus dem gegebenen Produkt der y_μ^*, d. h. der $y_\lambda^{(\sigma)}$, entsteht, indem man $y_\lambda^{(\sigma)}$ durch y_λ ersetzt, und alle Produkte der y_μ^* zu einer Klasse rechnet, denen dasselbe Produkt in $y_2, \ldots, y_l$ zugeordnet ist. Eine lineare Beziehung zwischen Produkten der y_μ^* von fester Dimension in den y_λ ($\lambda = 1, \ldots, l$) zerfällt dann sofort in lineare Beziehungen zwischen zu derselben Klasse gehörigen Produkten der y_μ^*; zu einer Klasse gehören aber alle und nur die Produkte

$$y_{\lambda_1}^{(\sigma_1)} y_{\lambda_2}^{(\sigma_2)} \cdots y_{\lambda_\varrho}^{(\sigma_\varrho)} \tag{6}$$

mit festen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ aus der Reihe der Zahlen $2, \ldots, l$ und mit veränderlichen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varrho$, die nur der Bedingung genügen müssen, daß ihre Summe einen festen Wert besitzt. Unter den in einer Linearkombination von Produkten (6) mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommenden Summanden wähle man nun ein Leitglied

$$y_{\lambda_1}^{(\tau_1)} y_{\lambda_2}^{(\tau_2)} \cdots y_{\lambda_\varrho}^{(\tau_\varrho)}$$

aus durch die üblichen Bedingungen, daß τ_1 das Maximum von σ_1 sein soll, τ_2 der größte Wert von σ_2 in all den Produkten, in denen $\sigma_1 = \tau_1$ ist usf. Dann entsteht bei Einsetzen der Werte (4) für die $y_\lambda^{(\sigma)}$ aus dieser Linearkombination von Produkten (6) eine Linearkombination von Produkten der y_λ ($\lambda = 1, \ldots, l$), die nicht identisch verschwindet, da in ihr das Produkt

$$y_1^{\tau_1} y_{\lambda_1} y_1^{\tau_2} y_{\lambda_2} \cdots y_1^{\tau_\varrho} y_{\lambda_\varrho}$$

genau mit dem Koeffizienten des soeben definierten Leitgliedes auftritt.

Zum *Beweis von Hilfssatz* 2 überlegt man sich genau wie bei Hilfssatz 1, daß es genügt, ihn für jeden Teilmodul von Y_n zu beweisen, der aus allen Linearkombinationen von Produkten

$$y_1^{\sigma_1} y_{\lambda_1} y_1^{\sigma_2} y_{\lambda_2} \cdots y_1^{\sigma_\varrho} y_{\lambda_\varrho} y_1^{\sigma_{\varrho+1}} \tag{7}$$

besteht, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$ beliebige, aber feste Zahlen der Reihe $2, \ldots, l$ sind, während $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varrho+1}$ veränderliche Zahlen mit fester Summe s sind. Sind $u_1, \ldots, u_{\varrho+1}$ kommutative Veränderliche, und ordnet man jedem Produkt (6) das Produkt [4])

$$u_1^{\sigma_1} u_2^{\sigma_2} \cdots u_{\varrho+1}^{\sigma_{\varrho+1}} \tag{7'}$$

dieser Veränderlichen zu, so sind die sämtlichen Linearkombinationen der Produkte (6) umkehrbar-eindeutig den Polynomen der u_ν ($\nu = 1, \ldots, \varrho + 1$) vom Grade s mit ganzzahligen Koeffizienten zugeordnet. Sei $P(u_1, \ldots, u_\varrho, u_{\varrho+1})$ ein solches Polynom, und sei Δ der Operator

$$\frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_\varrho} + \frac{\partial}{\partial u_{\varrho+1}},$$

---

[4]) s. W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Annalen **113** (1936), 528-567. Insbesondere Kap. II, § 2, wo das hier benutzte Verfahren ausführlich auseinandergesetzt wird.

dann wird nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$P(u_1, \ldots, u_\varrho, u_{\varrho+1}) = \sum_{\tau=0}^{s} \frac{u_{\varrho+1}^{\tau}}{\tau!} \Delta^{\tau} P(u_1 - u_{\varrho+1}, \ldots, u_\varrho - u_{\varrho+1}, 0) ,$$

und hierin ist $\frac{1}{\tau!} \Delta^{\tau} P(u_1 - u_{\varrho+1}, \ldots, u_\varrho - u_{\varrho+1}, 0)$ ein Polynom $a_\tau(\delta_1, \ldots, \delta_\varrho)$ mit ganzzahligen Koeffizienten in den Veränderlichen $\delta_\nu = u_\nu - u_{\nu+1}$. Nun entspricht einem Produkt

$$\delta_1^{\beta_1} \cdots \delta_\varrho^{\beta_\varrho} u_{\varrho+1}^{\tau}$$

eindeutig das Produkt

$$y_{\lambda_1}^{(\beta_1)} \cdots y_{\lambda_\varrho}^{(\beta_\varrho)} y_1^{\tau}$$

und damit dem Polynom $P(u_1, \ldots, u_\varrho, u_{\varrho+1})$ ein Ausdruck, der die Form der rechten Seite von (5) hat. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. *Es seien* η_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ l *Elemente aus* P. H_n *sei der Modul, der von allen Linearkombinationen derjenigen Produkte der* η_λ *gebildet wird, die das Gewicht* n *haben; es werde angenommen, daß die Gewichte der* η_λ *alle* $\leqq n$ *sind. Es besitze etwa* η_1 *ein Gewicht* $< n$. *Dann gilt: Jedes Element aus* H_n *läßt sich auch als Linearkombination von Produkten der rechtsnormierten Produkte*

$$\eta_\lambda^{(\sigma)} = \eta_1 [\eta_1 [\cdots [\eta_1 \eta_\lambda] \cdots]]$$

schreiben, wobei $\eta_\lambda^{(\sigma)}$ *aus* σ *Faktoren* η_1 *und einem Faktor* η_λ *besteht und* λ *die Zahlen von* 2 *bis* l *und* σ *alle die Zahlen durchläuft, für die das Gewicht von* $\eta_\lambda^{(\sigma)}$ *kleiner oder gleich* n *ist.*

Wir wollen dies auch so ausdrücken, daß wir sagen „η_1 läßt sich aus H_n eliminieren". — Zum *Beweis von Hilfssatz* 3 darf man sich nach dem nach (2) Gesagten auf die Behandlung rechtsnormierter Produkte aus H_n beschränken; da ferner das Gewicht von η_1 kleiner als n ist und ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren nach (2) verschwindet, darf man sich auf solche rechtsnormierten Produkte beschränken, in denen der letzte Faktor von η_1 verschieden ist. Es sei nun

$$\Pi_h \equiv \eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1)} [\cdots [\eta_{\lambda_{h-1}}^{(\sigma_{h-1})} \eta_{\lambda_h}^{(\sigma_h)}] \cdots]$$

ein rechtsnormiertes Produkt aus h Faktoren $\eta_\lambda^{(\sigma)}$, und es werde angenommen, daß man $\eta_1 \Pi_h$ durch die $\eta_\lambda^{(\sigma)}$ ausdrücken kann, was für $h = 1$ wegen $\eta_1 \eta_\lambda^{(\sigma)} = \eta_\lambda^{(\sigma+1)}$ sicher richtig ist. Dann gilt dasselbe auch für Produkte Π_{h+1} aus $h + 1$ Faktoren; denn sei

$$\Pi_{h+1} = \eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1)} [\eta_{\lambda_2}^{(\sigma_2)} [\cdots [\eta_{\lambda_h}^{(\sigma_h)} \eta_{\lambda_{h+1}}^{(\sigma_{h+1})}] \cdots]] ,$$

$$\varphi = \eta_{\lambda_2}^{(\sigma_2)} [\cdots [\eta_{\lambda_h}^{(\sigma_h)} \eta_{\lambda_{h+1}}^{(\sigma_{h+1})}] \cdots] ,$$

so ist $\eta_1 \Pi_{h+1} = \eta_1 [\eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1)} \varphi]$, und dies ist nach (2) gleich

$$- \eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1)} [\varphi \eta_1] - \varphi [\eta_1 \eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1)}] = \eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1)} [\eta_1 \varphi] + \eta_{\lambda_1}^{(\sigma_1+1)} \varphi ,$$

und da φ nur h Faktoren enthält, ist $\eta_1 \varphi$ nach Annahme in eine Linearkombination rechtsnormierter Produkte der $\eta_\lambda^{(\sigma)}$ verwandelbar. Es sei nun weiterhin schon gezeigt, daß sich jedes rechtsnormierte Produkt von $\eta_1, \ldots, \eta_l$, in dem höchstens k Faktoren η_1 vorkommen, durch die $\eta_\lambda^{(\sigma)}$ ausdrücken läßt; wegen $\eta_\lambda = \eta_\lambda^{(0)}$ für $\lambda > 1$ gilt dies nach dem eben Bewiesenen gewiß für $k = 1$. Kommt nun in dem Produkt

$$\Pi = \eta_{\lambda_1} [\eta_{\lambda_2} [\cdots [\eta_{\lambda_r} \eta_{\lambda_{r+1}}] \cdots]]$$

mit $k+1$ Faktoren η_1 der Faktor η_1 zum ersten Male an der i-ten Stelle vor, so verwandle man zunächst

$$\eta_{\lambda_{i+1}}[\cdots[\eta_{\lambda_r}\eta_{\lambda_{r+1}}]\cdots] = \Pi'$$

in eine Linearkombination Σ von Produkten der $\eta_\lambda^{(\sigma)}$, was nach Annahme möglich ist, da Π' nur k Faktoren η_1 enthält; dann verwandle man $\eta_1\Sigma$ in eine Linearkombination Σ' rechtsnormierter Produkte der $\eta_\sigma^{(\lambda)}$, was nach dem oben Bewiesenen möglich ist, und man hat dann

$$\Pi = \eta_{\lambda_1}[\cdots[\eta_{\lambda_{-1}}\Sigma']\cdots],$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz I wird nun durch die folgende Konstruktion bewiesen:

X_n sei der Modul der Polynome von der Dimension n in den x_i. Wir eliminieren ein x_i, etwa x_1, und erhalten nach Hilfssatz 1 und 2 algebraisch unabhängige Elemente $x_{i^*}^*$ $(i^* = 1, \ldots, k^*)$, die einen Teilmodul X_n^* von X_n erzeugen. Wir eliminieren ein $x_{i^*}^*$ von kleinster Dimension in den x_i, und erhalten ein neues System von algebraisch unabhängigen Elementen $x_{i^{**}}^{**}$, $(i^{**} = 1, \ldots, k^{**})$ und einen zugehörigen Teilmodul X_n^{**} von X_n^*. So fahren wir fort, bis wir zu einem System von algebraisch unabhängigen Elementen kommen, die sämtlich das Gewicht n in den x_i besitzen; dieselben mögen $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{k}}$ heißen; ihre Linearkombinationen bilden einen Modul $\bar{X}_n$. Es ist klar, daß das Verfahren abbricht, denn wenn man stets ein Element niedrigster Dimension eliminiert, vermindert sich bei jedem Schritt die Anzahl der Elemente niedrigster Dimension um eins. Wie aus der vor dem Beweis von Hilfssatz 1 gemachten Bemerkung hervorgeht, sind die $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{k}}$ jedenfalls gewissen Produkten $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{\bar{k}}$ vom Gewicht n aus P zugeordnet, und $\bar{X}_n$ ist daher in dem in Satz II erklärten Modul D_n enthalten. Es werde nun gezeigt, daß $D_n = \bar{X}_n$ ist und daß insbesondere jedes Produkt aus n Faktoren in P sich allein mit Hilfe der in P gültigen Rechengesetze in eine Linearkombination der Elemente $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{\bar{k}}$ verwandeln läßt. Bezeichnet man nämlich den von den Produkten aus n Faktoren erzeugten Modul aus P mit Ξ_n, so läßt sich Ξ_n nach Hilfssatz 3 auch durch Produkte der durch Elimination von ξ_1 aus Ξ_n entstehender Elemente

$$\xi_\lambda^{(\sigma)} = \xi_1[\cdots[\xi_1\xi_\lambda]\cdots]$$

ausdrücken; bezeichnen wir diese in einer geeigneten Reihenfolge mit $\xi_{i^*}^*$, $(i^* = 1, \ldots, k^*)$, so ist $\xi_{i^*}^*$ in R das Element $x_{i^*}^*$ zugeordnet, und durch Fortsetzung dieser Schlußweise finden wir, daß Ξ_n sich auch durch die Elemente $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{\bar{k}}$ ausdrücken lassen muß. Daraus folgt wegen der algebraischen, also a fortiori linearen Unabhängigkeit der $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{k}}$, daß verschiedenen Elementen aus Ξ_n verschiedene Elemente aus $\bar{X}_n$ zugeordnet sind; damit ist aber Satz I bewiesen, denn es ist klar, daß, wenn es zwei verschiedene Elemente aus P gäbe, denen dasselbe Element aus R zugeordnet wäre, diese dasselbe Gewicht haben müßten.

Satz II folgt aus der nach II* gemachten Bemerkung, daß die Gruppen

$$\{X_n\}/\{X_n^*\}, \quad \{X_n^*\}/\{X_n^{**}\} \quad \text{usf.}$$

keine Elemente endlicher Ordnung enthalten (s. Zusatz zu Hilfssatz 2).

2. Der freie Ring R von k Erzeugenden x_i aus Satz I läßt sich durch Hinzunahme von allen Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten von unendlich vielen der

Produkte (1) und Hinzufügen eines Einheitselementes 1 zu einem Ringe $\mathfrak{R}$ erweitern[5]), dessen allgemeines Element dann die Form hat

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_\nu=1}^{k} c_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \tag{8}$$

wobei c_0 und die $c_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ganze Zahlen sind und c_0 für $c_0 \cdot 1$ steht. — Es sei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe von k Erzeugenden a_i; dann erhält man eine treue Darstellung von $\mathfrak{F}$ durch Elemente von $\mathfrak{R}$, wenn man einem Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{F}$ das Produkt der zugeordneten Elemente aus $\mathfrak{R}$ zuordnet, dem Einheitselement von $\mathfrak{F}$, das ebenfalls mit 1 bezeichnet werde, das Element 1 aus $\mathfrak{R}$ und den Elementen a_i und a_i^{-1} resp. die Elemente

$$1 + x_i \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x_i^\nu$$

aus $\mathfrak{R}$ zuordnet. Dabei sei $x_i^0 = 1$ gesetzt. Jedem Element aus $\mathfrak{F}$ ist dann ein Element

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x_i) \tag{9}$$

aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet, wobei die P_ν Polynome in den x_i mit ganzzahligen Koeffizienten und von der Dimension ν sind. Diejenigen Elemente aus $\mathfrak{F}$, in deren „Entwicklung" (9) in $\mathfrak{R}$ die P_ν für alle $\nu < n$ Null sind, bilden eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}$, die die n-te Dimensionsgruppe $\mathfrak{D}_n(\mathfrak{F})$ oder kurz $\mathfrak{D}_n$ heiße. Es ist $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{F}$. Eine weitere Reihe von charakteristischen Untergruppen bilden die Gruppen der absteigenden Zentrenreihe von $\mathfrak{F}$, die mit $\mathfrak{Z}_n(\mathfrak{F})$ oder kurz $\mathfrak{Z}_n$ bezeichnet werden mögen; sie sind so definiert, daß $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{Z}_n$ für $n > 1$ die kleinste Untergruppe von $\mathfrak{F}$ ist, die alle Kommutatoren irgendeines Elementes aus $\mathfrak{F}$ mit irgendeinem Element aus $\mathfrak{Z}_{n-1}$ enthält.

Nun gilt der Satz:

III. *Die n-te Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ der absteigenden Zentrenreihe ist mit der n-ten Dimensionsgruppe $\mathfrak{D}_n$ identisch.*

Aus den Sätzen II* und III folgt der weitere Satz:

IV. (*Identität von P. Hall.*) *Es sei $q = p^r$ eine Potenz der Primzahl p. Mit a_i' mögen die Elemente a_i in irgendeiner Reihenfolge bezeichnet werden. Dann gibt es für $\lambda = 2, \ldots, p$ ein Element Z_λ aus $\mathfrak{Z}_\lambda$ so, daß*

$$(a_1' a_2' \cdots a_k')^q = a_1^q a_2^q \cdots a_k^q Z_2^q Z_3^q \cdots Z_{p-1}^q Z_p \tag{10}$$

wird.

Das allgemeinere Theorem 3.1 von Hall[3]) wird genau wie IV und ohne größere Schwierigkeit bewiesen; der Satz IV ist seiner einfachen Formulierung und der von Hall aus demselben gezogenen Folgerungen halber hier vorgezogen worden.

Beweis von IV. Sei b irgendein Element aus $\mathfrak{F}$ und $1 + y$ das ihm zugeordnete Element aus $\mathfrak{R}$. Dann ist b^q in $\mathfrak{R}$ das Element $1 + \sum_{\lambda=1}^{q} \binom{q}{\lambda} y^\lambda$ zugeordnet, und da y nur Glieder von mindestens der ersten Dimension in den x_i enthält, sind hierin die Koeffizienten aller Summanden, deren Dimension $< p$ ist, durch q teilbar. Man wähle nun insbesondere für b das Element $a_1' \cdots a_k'$. Dann ist dem Element auf der linken Seite von (10) ein Element aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet, dessen Glieder bis zur $(p-1)$-ten Dimension durch q

---

[5]) s. W. Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Annalen 111 (1935), 259-280, § 2.

teilbare Koeffizienten haben. Das Gleiche gilt von der Entwicklung von

$$Z_1 = (a_1^q \cdots a_k^q)^{-1}$$

und folglich auch von der Entwicklung von

$$c_2 = (a_1^q \cdots a_k^q)^{-1} (a_1' \cdots a_k')^q .$$

Nun beginnt die Entwicklung von c_2 mit Gliedern zweiter Dimension; diese sind nach III eine Linearkombination der zweiten Differenzen [6]) mit ganzzahligen Koeffizienten, und nach II* müssen diese Koeffizienten alle durch q teilbar sein. Da für jedes n alle Linearkombinationen der n-ten Differenzen [6]) als Glieder n-ter Dimension eines Elementes aus $\mathfrak{Z}_n$ auftreten, so gibt es also ein Element Z_2, dessen Glieder zweiter Dimension aus denen von c_2 durch Division mit q entstehen. Das Element

$$c_3 = Z_2^{-q} c_2$$

besitzt daher eine Entwicklung in R, die mit Gliedern dritter Dimension beginnt, und eine Wiederholung derselben Schlußweise liefert nach p Schritten Satz IV.

Beweis von III. $\mathfrak{Z}_{n+1}$ ist in $\mathfrak{D}_{n+1}$ enthalten [7]). Zum Beweise von III ist daher nur der Nachweis erforderlich, daß ein Element aus $\mathfrak{D}_{n+1}$ notwendig in $\mathfrak{Z}_{n+1}$ liegt. Wir nehmen an, da III für $n = 1, 2$ trivial ist, daß $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{D}_n$ ist, bilden nun $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_{n+1} = \mathfrak{F}^*$ ab und haben zu zeigen, daß jedem Element von $\mathfrak{D}_{n+1}$ das Einheitselement von $\mathfrak{F}^*$ entspricht. Da $\mathfrak{Z}_{n+1}$ und $\mathfrak{D}_{n+1}$ Untergruppen von $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{Z}_n$ sind, genügt es zu zeigen:

III*. *Es gibt in* $\mathfrak{Z}_n$ *Elemente* z_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ *mit der Eigenschaft, daß erstens die* z_ϱ *und ihre Produkte ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen von* $\mathfrak{Z}_n$ mod $\mathfrak{Z}_{n+1}$ *liefern, und daß zweitens jedes Produkt der* z_ϱ, *das in* $\mathfrak{D}_{n+1}$ *liegt, auch in* $\mathfrak{Z}_{n+1}$ *liegt.*

Es ist wegen $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{Z}_n$ und $\mathfrak{D}_{n+1} > \mathfrak{Z}_{n+1}$ klar, daß die z_ϱ zusammen mit ihren Produkten auch ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{Z}_n$ mod $\mathfrak{D}_{n+1}$ liefern. Zum Beweise von III* schreiben wir die Gruppe $\mathfrak{F}$ additiv; um Verwechslungen zu vermeiden, führen wir Symbole α_i ein, die den Erzeugenden a_i von $\mathfrak{F}$ zugeordnet sind, erklären zwischen diesen eine nicht-kommutative aber assoziative Addition, ordnen der 1 von $\mathfrak{F}$ ein Element 0, den a_i^{-1} Elemente $-\alpha_i$ mit $\alpha_i + (-\alpha_i) = 0$ und einem Produkt

$$a_{i_1}^{\tau_1} a_{i_2}^{\tau_2} \cdots a_{i_\varrho}^{\tau_\varrho}$$

aus $\mathfrak{F}$ die Summe

$$\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \cdots + \tau_\varrho\alpha_\varrho \tag{11}$$

zu. Wir definieren ferner ein Produkt irgend zweier Summen (11); sind σ_1 und σ_2 zwei solche Summen, so sei

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_2 .$$

Sind b_1 und b_2 die σ_1 und σ_2 zugeordneten Elemente aus $\mathfrak{F}$, so ist also dem Element $\sigma_1\sigma_2$ der Kommutator $b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}$ zugeordnet. Die Multiplikation der σ ist weder assoziativ noch kommutativ; es gelten auch nicht die distributiven Gesetze; hingegen gilt $\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$. Den Bereich, der aus den $\pm\alpha_i$ durch Addition erzeugt wird, nennen wir Φ; die Elemente von Φ sind den Elementen von $\mathfrak{F}$ umkehrbar eindeutig zugeordnet und bilden bei Addition eine mit $\mathfrak{F}$ isomorphe Gruppe. Wir sagen, ein Element von Φ

---

[6]) l. c. [5]), S. 266, IVa, und S. 267.

[7]) l. c. [5]), S. 265, III.

habe das Gewicht λ, wenn es sich als Summe von Produkten von λ Faktoren schreiben läßt. Alle und nur die Elemente von Φ haben das Gewicht λ, die Elementen aus $\mathfrak{Z}_\lambda$ entsprechen. Entspricht ein Element aus Φ einem Element aus $\mathfrak{Z}_\lambda$ aber keinem solchen aus $\mathfrak{Z}_{\lambda+1}$, so sagen wir, es habe das genaue Gewicht λ. Nun gelten in Φ gewisse „approximative" Rechengesetze in dem folgenden Sinne: Sind β, γ, δ irgend drei Elemente aus Φ mit den genauen Gewichten λ_1, λ_2, λ_3, so ist

$$(12)\qquad \begin{cases} \beta+(\gamma+\delta)=(\beta+\gamma)+\delta\,, \\ \beta+\gamma=\gamma+\beta+\varepsilon_1\,, \\ \beta(\gamma+\delta)=\beta\gamma+\beta\delta+\varepsilon_2\,, \\ (\gamma+\delta)\,\beta=\gamma\beta+\gamma\delta+\varepsilon_3\,, \\ \beta\gamma+\gamma\beta=0\,, \\ \beta[\gamma\delta]+\gamma[\delta\beta]+\delta[\beta\gamma]=\varepsilon_4\,, \end{cases}$$

wobei die Gewichte von ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 bzw. größer sind als

$$\lambda_1+\lambda_2-1,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\,.$$

Die Beziehungen (12) stellen leicht zu verifizierende Relationen zwischen Kommutatoren dar[8]). Wären die ε alle $=0$, so würde (12) genau die Rechengesetze für den in Satz I eingeführten Ring P liefern. Aus (12) folgt nun sofort:

Hilfssatz 4. Sind π_μ ($\mu=1,\ldots,m$) irgendwelche Produkte der α_i mit n Faktoren, sind π_μ^* diejenigen Elemente aus P, *die man aus den π_μ erhält, wenn man in ihnen α_i durch die ξ_i ersetzt, und ist $\sum_{\mu=1}^{m}\pi_\mu^*$ in* P *gleich Null, dann hat das Element $\pi_1+\cdots+\pi_m$ von Φ ein Gewicht $>n$.*

Nun wähle man als die in III* genannten Elemente z_ϱ die den Produkten

$$(13)\qquad \alpha_{i_1}[\alpha_{i_2}[\cdots[\alpha_{i_{n-1}}\alpha_{i_n}]\cdots]],\qquad i_\nu=1,\ldots k,$$

zugeordneten Elemente aus $\mathfrak{Z}_n$; es ist leicht zu sehen, daß diese die erste der in III* geforderten Eigenschaften haben. Sind Δ_ϱ — in irgendeiner Reihenfolge — die den Produkten

$$(14)\qquad \xi_{i_1}[\xi_{i_2}[\cdots[\xi_{i_{n-1}}\xi_{i_n}]\cdots]]$$

aus P zugeordneten n-ten Differenzen aus $\mathfrak{R}$, so beginnt die Entwicklung eines dem Produkt (13) zugeordneten Elementes z_ϱ aus $\mathfrak{Z}_n$ mit der (14) zugeordneten n-ten Differenz Δ_ϱ. Ein Produkt Π der z_ϱ entspricht einer Summe von Elementen (13); die dieser Summe nach Hilfssatz 4 zugeordnete Summe von Produkten (14) heiße Ξ. Andrerseits besitzt Π in $\mathfrak{R}$ eine Entwicklung, die mit Gliedern von mindestens n-ter Dimension beginnt, wobei diese Glieder n-ter Dimension aus der dem Element Ξ von P in $\mathfrak{R}$ zugeordneten Summe von n-ten Differenzen bestehen. Nach Satz I verschwindet diese Summe nur dann, wenn Ξ verschwindet, und nach Hilfssatz 4 liegt Π dann in $\mathfrak{Z}_{n+1}$. Das ist der Inhalt von III*, und damit ist auch III bewiesen.

Satz III ermöglicht einen kurzen Beweis der im zweiten Abschnitt der Arbeit von P. Hall[1]) bewiesenen Sätze, da das Rechnen mit den Dimensionsgruppen sich recht einfach gestaltet; allerdings benutzt der hier gegebene Beweis[9]) von III einen Teil der Überlegungen von Hall und ist keineswegs kürzer als diese; trotzdem dürfte III als methodisches Hilfsmittel nützlich sein, wie im folgenden an einem Beispiel gezeigt werden soll. — Als Folgerung von III sei noch die Bemerkung erwähnt:

---

[8]) Man benutze z. B. Theorem 2.59 von Hall l. c.[1]), S. 57.

[9]) Beim Beweise der Formeln (12) und implizit durch Berufung auf die unter [5]) zitierte Arbeit.

Die Faktorgruppe einer freien Gruppe nach einer Gruppe ihrer absteigenden Zentrenreihe enthält außer dem Einheitselement keine Elemente von endlicher Ordnung.

3. Es seien c_1 und c_2 zwei Elemente der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ von k Erzeugenden a_i. Unter dem Gewicht von c_1 bzw. c_2 verstehe man nun die Dimensionen λ_1 bzw. λ_2 der nichtverschwindenden Glieder niedrigster Dimension in den Entwicklungen von c_1 und c_2 in $\mathfrak{R}$. Nach III stimmt dies überein mit der Definition von Hall[1]). Dann gilt:

V. *Das Gewicht λ des Kommutators $c = c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1}$ ist gleich der Summe $\lambda_1 + \lambda_2$ der Gewichte von c_1 und c_2, falls diese Gewichte voneinander verschieden sind. Dann und nur dann ist das Gewicht von c größer als $\lambda_1 + \lambda_2$, wenn die von c_1 und c_2 erzeugte Untergruppe auch von zwei Elementen $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ mit den Gewichten λ_1 bzw. $\lambda_1 + \mu$ erzeugt werden kann, und in diesem Falle ist $\lambda = 2\lambda_1 + \mu$.*

Zum Beweise zeigen wir zunächst: Sind z_1 und z_2 die in den x_i homogenen Polynome mit den Dimensionen λ_1 und λ_2 in den x_i, mit welchen die Entwicklung von c_1 bzw. c_2 in $\mathfrak{R}$ beginnt, so ist dann und nur dann z_1 mit z_2 vertauschbar, d. h. $z_1 z_2 - z_2 z_1 = 0$, wenn es zwei ganze Zahlen s und t gibt, so daß $sz_1 - tz_2 = 0$ ist. Daraus folgt sogleich der erste Teil von V, denn die Entwicklung von c beginnt mit $z_1 z_2 - z_2 z_1$, falls dieser Ausdruck nicht verschwindet. Nun gilt der folgende Satz: Sind y_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ irgend l in den x_i homogene algebraisch unabhängige Polynome aus R, so ist y_1 nur dann mit einem Polynom in den y_i vertauschbar, wenn dieses ein Vielfaches einer Potenz von y_1 ist. Sei nämlich

$$Q = \Sigma \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_h} y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_h}$$

ein Polynom in den y_j, das man ohne Beschränkung der Allgemeinheit homogen in den y_j annehmen darf, so definiere man als Leitglied von Q den (von Null verschiedenen) Summanden

$$L = \gamma_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_h} y_{\tau_1} y_{\tau_2} \cdots y_{\tau_h}$$

von Q, für den τ_1 nicht größer als irgendein j_1 ist, τ_2 nicht größer als irgendein j_2, für das y_{j_2} als zweiter Faktor in einem mit y_{τ_1} beginnenden Summanden von Q auftritt usw. Ist nun $y_1 Q = Q y_1$, so muß $y_1 L = L' y_1$ sein, wobei L' irgendein Summand von Q ist, und das ist nur dann möglich, wenn L ein Vielfaches von y_1^h ist.

Nun sei $\lambda_1 \leqq \lambda_2$. Wir betrachten den Modul X_{λ_2} der homogenen Polynome vom Gewicht λ_2 in den x_i und eliminieren mit dem im Beweise von Satz I benutzten Verfahren nacheinander x_1, x_1^*, x_1^{**}, usf., bis wir zu einem System von algebraisch unabhängigen Größen y_j kommen, deren Dimensionen alle $\geqq \lambda_1$ sind und die sowohl den Modul der λ_1-ten wie den der λ_2-ten Differenzen erzeugen. Die y_j von der Dimension λ_1 bilden dabei sogar eine Basis für die λ_1-ten Differenzen, und wir können durch Übergang zu einer neuen Basis der λ_1-ten Differenzen vermittelst einer linearen Substitution der y_j von der Dimension λ_1 stets erreichen, daß z_1 ein Vielfaches eines y_j, etwa gleich sy_1 ist. Da leicht einzusehen ist, daß der Bereich der λ_2-ten Differenzen für $\lambda_2 > \lambda_1$ keine Potenz von y_1 enthalten kann, folgt V für den Fall $\lambda_1 < \lambda_2$. Für $\lambda_1 = \lambda_2$ folgt ebenso, daß z_2 ebenfalls ein Vielfaches von y_1 sein muß, falls $z_1 z_2 - z_2 z_1 = 0$ sein soll.

Es sei also $z_1 = sy_1$, $z_2 = ty_1$ und d der größte gemeinsame Teiler von s und t. Nach bekannten Sätzen über die Automorphismen einer freien Gruppe [10]) von zwei Er-

---

[10]) s. J. Nielsen, Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Annalen **78** (1918), 385-397.

zeugenden folgt dann, daß es zwei Potenzprodukte $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ von c_1 und c_2 gibt, aus denen sich c_1 und c_2 rückwärts wieder ausdrücken lassen, derart daß

$$\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_1^{-1} \bar{c}_2^{-1} = c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1} \tag{15}$$

ist identisch in c_1, c_2 und so, daß $\bar{c}_1$ in R eine mit $\pm dy_1$ beginnende Entwicklung besitzt, während $\bar{c}_2$ mit Gliedern von höherer als der λ_1-ten Dimension beginnt. Man kann nämlich allgemein erreichen, daß $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ Entwicklungen

$$a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \quad \text{und} \quad a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \qquad (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \text{ ganze Zahlen})$$

mit $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1$ besitzen, wobei $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ der Bedingung (15) genügen und dieselbe Gruppe erzeugen wie c_1 und c_2. Beginnt nun die Entwicklung von $\bar{c}_2$ in $\mathfrak{R}$ mit dem Polynom $\bar{y}_2$ von der Dimension $\lambda_1 + \mu$, so beginnt die Entwicklung von c mit $d(y_1 \bar{y}_2 - \bar{y}_2 y_1)$. Damit ist Satz V völlig bewiesen.

Zusatz bei der Korrektur (5. 3. 1937). In einer mir nachträglich bekannt gewordenen Arbeit beweist E. Witt eine wesentliche Verallgemeinerung von Satz I sowie eine sehr wichtige Ergänzung dazu. Die Arbeit von E. Witt erscheint demnächst in diesem Journal.

Eingegangen 26. Oktober 1936.

Das Linienelement als singuläre Punktreihe.

Herrn Professor F. Engel zum 75. Geburtstag.

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

Die Lieschen Abbildungen der Linienelemente einer Ebene auf die Punkte eines Raumes R_3 sind neuerdings von K. Strubecker [1]) und H. Beck [2]) untersucht worden. Als Bildmannigfaltigkeiten treten dabei reguläre und singuläre M_3^2 des R_4 und die M_4^6 des R_8 [3]) auf. Im folgenden wird als Bildmannigfaltigkeit die aus der Geometrie der Punktreihen bekannte $\mathfrak{M}_3^3$ des $\mathfrak{R}_5$ zu Grunde gelegt.

In der komplexen projektiven Ebene bezeichnen wir als singuläre Punktreihe die Figur eines mit einem binären Parameter $\xi_1 : \xi_2$ behafteten Punktes $x_1 : x_2 : x_3$. Als Koordinaten dieser Punktreihe dienen die sechs Produkte $x_i \xi_k$, die man aus den Koordinaten des Punktes und des binären Parameters bilden kann [4]). Deutet man sie als homogene Punktkoordinaten im $\mathfrak{R}_5$, so erhält man eine Abbildung der singulären Punktreihen auf eine Segresche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^3$ dieses $\mathfrak{R}_5$. Projiziert man nun diese $\mathfrak{M}_3^3$ von einer Geraden aus auf einen R_3, so erhält man eine Abbildung der singulären Punktreihen der Ebene auf die Punkte dieses R_3. Damit diese Abbildung eindeutig umkehrbar wird, ist es nötig, die projizierende Gerade so zu wählen, daß sie $\mathfrak{M}_3^3$ in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten trifft.

Den beiden ausgezeichneten Punkten von $\mathfrak{M}_3^3$ entsprechen zwei ausgezeichnete singuläre Punktreihen der Ebene. Ihre Punkte wählen wir als absolute Punkte der Ebene, ihre Verbindungslinie als uneigentliche Gerade. Auf dieser Geraden zeichnen wir ferner eine feste reguläre Punktreihe aus; d. h. wir versehen die uneigentliche Gerade mit einer Parameterdarstellung. Dem binären Parameter einer singulären Punktreihe mit eigentlichem Trägerpunkt wird dann ein bestimmter uneigentlicher Punkt, eine Richtung zugeordnet: Aus den singulären Punktreihen werden Linienelemente.

Auf diese Weise gewinnen wir eine Abbildung der Linienelemente der Ebene auf die Punkte der $\mathfrak{M}_3^3$ im $\mathfrak{R}_5$ und dann auf die Punkte eines Bild-R_3. Diese letzte Abbildung

---

[1]) K. Strubecker, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf Punkte des Raumes, Monatshefte f. Math. u. Phys. **42** (1935), S. 309-376.

[2]) Die Abhandlung von H. Beck war beim Abschluß dieser Arbeit noch nicht erschienen. Vgl. E. A. Weiss, Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation IX: Die Geometrie der Linienelemente, Deutsche Mathematik **2** (1937).

[3]) Hierzu siehe auch E. A. Weiss, Der Kegelschnitt als Elementverein, Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. 1935, 3. Abhdl.

[4]) Wir bezeichnen mit kleinen Buchstaben Elemente der Ebene, mit großen deutschen Buchstaben Elemente im $\mathfrak{R}_5$, mit großen lateinischen Buchstaben Elemente im Bild-R_3.

erweist sich als identisch mit einer der beiden Lieschen Abbildungen. Neu ist das Abbildungsverfahren: Es ist frei von jeder analytischen Willkür, gestattet erstens, die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Linienelemente zu einem natürlichen Kontinuum zu ergänzen, und gibt zweitens einen klaren Einblick in die Struktur der von Lie nur analytisch untersuchten Abbildung.

1. *Aus der Geometrie der Punktreihen.* Wir beginnen damit, die Hilfsmittel zusammenzustellen, die wir im folgenden aus der von Th. Reye [5]) begründeten Geometrie der Punktreihen benötigen [6]).

Eine *Punktreihe* der Ebene wird durch Nullsetzen einer in Geradenkoordinaten $u_1 : u_2 : u_3$ und einem binären Parameter $\tau_1 : \tau_2$ linearen Form definiert:

$$(1) \qquad (um)\,(\mu\tau) \equiv (u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3)\,(\mu_1\tau_2 - \mu_2\tau_1) = 0\,.$$

m_i und μ_k sind Symbole. Erst ein Produkt $m_i\,\mu_k$ hat reale Bedeutung und stellt eine komplexe Zahl m_{ik} dar. Die sechs Zahlen m_{ik} sind die homogenen Koordinaten der Punktreihe. Wir deuten sie als Punktkoordinaten im $\mathfrak{R}_5$. Damit sind die Punktreihen der Ebene auf die Punkte des $\mathfrak{R}_5$ abgebildet.

Eine Punktreihe stellt im allgemeinen eine mit einer Parameterdarstellung versehene Gerade dar: Jedem Parameter τ ordnet (1) die Gleichung eines Punktes zu, dessen Koordinaten in $\tau_1 : \tau_2$ linear sind. In diesem Falle heißt die Punktreihe *regulär*. Im Sonderfall kann aber die Form $(um)\,(\mu\tau)$ zerfallen. Die Gleichung [7])

$$(2) \qquad (um) \cdot (\mu\tau) = 0$$

stellt dann eine singuläre Punktreihe dar. Sie wird von dem Punkte m gebildet, der mit dem Parameter μ versehen ist.

Bei der Abbildung werden den singulären Punktreihen die Punkte der im $\mathfrak{R}_5$ gelegenen Segreschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^3$

$$(3) \qquad m_1\cdot\mu_1 : m_2\cdot\mu_1 : m_3\cdot\mu_1 : m_1\cdot\mu_2 : m_2\cdot\mu_2 : m_3\cdot\mu_2$$

zugeordnet. Ihre Parameterdarstellung zeigt, daß sie sowohl als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiv auf einander bezogenen Ebenen (also als Ort von ∞^2 „erzeugenden" Geraden), als auch als Ort der Verbindungsebenen entsprechender Punkte dreier projektiv auf einander bezogenen Geraden (also als Ort von ∞^1 „erzeugenden" Ebenen) gewonnen werden kann. Durch jeden Punkt $m_i \cdot \mu_k$ der $\mathfrak{M}_3^3$ läuft eine erzeugende Ebene $\mathfrak{E}_\mu$ und eine erzeugende Gerade $\mathfrak{G}_m$.

Dual zur Punktreihe wird die reguläre und die singuläre *Geradenreihe*

$$(4) \qquad (nx)\,(\nu\sigma) = 0$$

definiert.

---

[5]) Th. Reye, Über lineare Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel und kollinearer Bündel oder Räume, Crelles Journal **104-108** (1889-1891). Vgl. auch H. Guradze, Die Reyesche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde, behandelt mittels einer besonderen Art bilinearer Formen, Diss. Breslau 1900. E. Timerding, Die Reyesche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898, S. 317-328. E. A. Weiss, Über eine Konstruktion des Nullsystems im R_{2p+1}, Monatshefte f. Math. u. Phys. **39** (1932), S. 345-358; Abbildung der M_6^2 des R_7 auf Punktreihen eines linearen Komplexes, ebenda S. 385-394.

[6]) In der Gestalt, wie sie für das Folgende benutzt werden, sind diese Hilfsmittel ausführlich behandelt in meiner Arbeit: Sur les systèmes linéaires de suites de points en géométrie plane projective, L'Enseignement Math. **29** (1930), S. 59-71.

[7]) Faktoren mit selbständiger realer Bedeutung trennen wir durch einen Punkt.

Von einer Punktreihe (1) und einer Geradenreihe (4) sagen wir, sie seien *konjugiert*, wenn die Gleichung

$$(nm)\,(v\mu) = 0 \tag{5}$$

besteht. Sind beide Reihen regulär, so besagt das Bestehen dieser Gleichung, daß die von ihnen bestimmte projektive Verwandtschaft

$$(mn)\,(\mu\tau)\,(v\sigma) = 0 \tag{6}$$

involutorisch ist (Abb. 1). Ist die Geradenreihe regulär, die Punktreihe singulär, so bedeutet (5), daß der Punkt m der Punktreihe auf der Geraden μ der Geradenreihe liegt (und dual). Sind zugleich Punkt- und Geradenreihe singulär, so sind entweder ihre binären Parameter identisch oder der Punkt der Punktreihe liegt auf der Geraden der Geradenreihe.

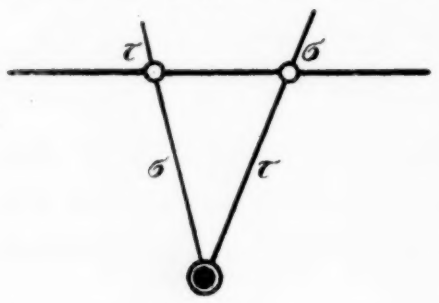


Abb. 1.

Die Gleichung (5) ist die allgemeinste lineare Gleichung in Punktreihenkoordinaten. Sie stellt daher im $\mathfrak{R}_5$, wenn man sich $(nx)\,(v\sigma)$ fest und $(um)\,(\mu\tau)$ variabel vorstellt, den allgemeinsten $\mathfrak{R}_4$ dar. Damit sind die Geradenreihen der Ebene auf die $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{R}_5$ abgebildet. Ist eine Punktreihe zu einer Geradenreihe konjugiert, so entspricht sie einem Punkte, der im Bild-$\mathfrak{R}_4$ der Geradenreihe liegt.

Für das Folgende ist es nötig, auch gewisse andere lineare Punktreihenmannigfaltigkeiten zu kennen.

Ein von zwei Punktreihen aufgespanntes *Punktreihenbüschel*

$$\lambda_1 (um_1)\,(\mu_1\tau) + \lambda_2 (um_2)\,(\mu_2\tau) = 0 \tag{7}$$

hat als Kombinante die Geradenreihe 2. Klasse

$$(xm_1m_2)\,(\mu_1\tau)\,(\mu_2\tau) = 0. \tag{8}$$

Es bestimmt also eine mit Parameterdarstellung versehene („bezifferte") Kurve 2. Klasse. Die Träger der Punktreihen sind die Tangenten der Kurve. Jede der Tangenten ist durch die Kurve mit einem Parameter versehen. Aus einer festen Tangente schneiden alle übrigen die Parameterdarstellung aus.

Da die Bildgerade eines Büschels $\mathfrak{M}_3^3$ im allgemeinen nicht schneidet, enthält das allgemeine Büschel keine singuläre Punktreihe. Für das Folgende brauchen wir aber die Kenntnis eines speziellen Büschels, das von zwei singulären Punktreihen mit verschiedenen Punkten und binären Parametern aufgespannt wird:

$$\lambda_1 (um_1) \cdot (\mu_2\tau) + \lambda_2 (um_2) \cdot (\mu_1\tau) = 0. \tag{9}$$

Dieses Büschel enthält außer den beiden genannten nur reguläre Punktreihen und diese sind so beschaffen, daß sie für den Parameter μ_2 den Punkt m_2 und für den Parameter μ_1 den Punkt m_1 liefern.

Dual zu den Geraden sind im $\mathfrak{R}_5$ die Räume $\mathfrak{R}_3$. Ihnen entsprechen als Orten von $\mathfrak{R}_4$ die *Büschel von Geradenreihen*, also mit Parameterdarstellung versehene Kurven 2. Ordnung. Als Ort von Punkten stellt ein $\mathfrak{R}_4$ das Gebüsch aller Punktreihen dar, die zu allen Geradenreihen des Büschels konjugiert sind. Darunter befinden sich als singuläre Punktreihen die Punkte der bezifferten Kurve 2. Ordnung selbst, versehen mit den ihnen durch die Parameterdarstellung der Kurve zugeordneten Parametern. Diese singulären Punktreihen werden auf die Punkte der rationalen Raumkurve 3. Ordnung abgebildet, in welcher der Bild-$\mathfrak{R}_3$ des *Punktreihengebüsches* die $\mathfrak{M}_3^3$ schneidet.

Auch hier brauchen wir für das Folgende einen Sonderfall, das *Gebüsch aller Punktreihen, die auf ein und derselben Trägergeraden liegen.* Es enthält ∞^2 singuläre Punktreihen, alle Punkte der Geraden, jeden versehen mit allen binären Parametern. Diese Mannigfaltigkeit wird auf eine, auf $\mathfrak{M}_3^3$ gelegene Fläche 2. Ordnung abgebildet, die einen $\mathfrak{R}_3$, den Bild-$\mathfrak{R}_3$ des Gebüsches aufspannt.

2. *Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ in den R_3.* Soll die $\mathfrak{M}_3^3$ in einen R_3 projiziert werden, so muß die Projektion von einer Geraden $\mathfrak{G}$ aus geschehen. Die Verbindungsebene von $\mathfrak{G}$ mit einem abzubildenden Punkte $\mathfrak{X}$ der $\mathfrak{M}_3^3$ schneidet dann den Bild-R_3 in einem Punkte, der Projektion X' von $\mathfrak{X}$. Umgekehrt ist aber X' nicht das Bild von $\mathfrak{X}$ allein, weil die Ebene $\mathfrak{G}X'$ die $\mathfrak{M}_3^3$ in drei Punkten schneidet. Um die Eineindeutigkeit der Abbildung herbeizuführen, ist es daher nötig, die Gerade $\mathfrak{G}$ speziell so zu wählen, daß sie $\mathfrak{M}_3^3$ in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ schneidet (so daß also $\mathfrak{G}$ nicht Erzeugende von $\mathfrak{M}_3^3$ wird.) Es sei $\mathfrak{P}_1$ das Bild von $(um_1) \cdot (\mu_1 \tau) = 0$ und $\mathfrak{P}_2$ das Bild von $(um_2) \cdot (\mu_2 \tau) = 0$. Damit sind in der Ebene der Punktreihen zwei Punkte m_1, m_2 ausgezeichnet. Wir bezeichnen sie als *absolute Punkte*, ihre Parameter μ_1, μ_2 als *isotrop* und nennen ihre Verbindungslinie *uneigentlich*. Die auf der uneigentlichen Geraden gelegenen Punktreihen werden dann auf einen im $\mathfrak{R}_5$ ausgezeichneten $\mathfrak{R}_3$ abgebildet, der nach dem oben Gesagten $\mathfrak{M}_3^3$ in einer Fläche 2. Ordnung $\mathfrak{F}^2$ schneidet. Wir nennen diesen Raum $\mathfrak{R}_3^0$. Seine Schnittgerade mit dem Bild-R_3 heiße G.

Die durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ laufenden erzeugenden Ebenen $\mathfrak{E}_{\mu_1}$, $\mathfrak{E}_{\mu_2}$ der $\mathfrak{M}_3^3$ schneiden $\mathfrak{R}_3^0$ in je einer Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$. Diese Geraden stellen die uneigentliche Gerade der Ebene einmal als Ort ihrer mit dem Parameter μ_1, das andere Mal mit dem Parameter μ_2 versehenen Punkte dar. Ebenso sind die übrigen, mit $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ der gleichen Schar angehörigen Erzeugenden von $\mathfrak{F}^2$ Schnittgeraden von $\mathfrak{R}_3^0$ mit erzeugenden Ebenen $\mathfrak{E}_\mu$ der $\mathfrak{M}_3^3$. Ihre Punkte stellen daher die mit dem entsprechenden Parameter μ versehenen Punkte der uneigentlichen Geraden dar. Die Erzeugenden der zweiten Schar sind Erzeugende von $\mathfrak{M}_3^3$. Jede von ihnen stellt einen, nacheinander mit allen binären Parametern versehenen uneigentlichen Punkt dar. Unter ihnen befinden sich insbesondere die durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ laufenden Erzeugenden $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$. Die Schnittpunkte $\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_1$ sind die Bildpunkte der singulären Punktreihen $(um_2) \cdot (\mu_1 \tau) = 0$ und $(um_1) \cdot (\mu_2 \tau) = 0$.

Die Ebenen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_2$ schneiden aus G je einen Punkt aus. Wir wollen diese Schnittpunkte J_1, J_2 nennen. Bei der Projektion werden die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_2$ in den Punkt J_1 projiziert. Dieser stellt also dar: 1. alle mit dem Parameter μ_1 versehenen uneigentlichen Punkte und 2. den nacheinander mit allen binären Parametern versehenen Punkt m_2. Entsprechend J_2.

Eine durch $\mathfrak{G}$ laufende Ebene allgemeiner Lage von $\mathfrak{R}_3^0$ schneidet $\mathfrak{F}^2$ in einem regulären Kegelschnitt, der die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ enthält. Dieser Kegelschnitt stellt eine projektive Beziehung zwischen den beiden Erzeugendenscharen von $\mathfrak{F}^2$ her. Man erhält also die entsprechende Mannigfaltigkeit singulärer Punktreihen auf der uneigentlichen Geraden, wenn man in einer der ∞^1 Punktreihen (9), welche den Punkten m_1, m_2 die Parameter μ_1, μ_2 zuordnen, jeden Punkt mit dem ihm durch die Punktreihe zugeordneten Parameter verbindet („Punktreihe als Ort singulärer Punktreihen"). Eine solche Punktreihenmannigfaltigkeit entspricht also einem Punkte allgemeiner Lage von G. *Wir bemerken für später ausdrücklich, daß hiernach zwei singuläre Punktreihen, bestehend aus*

Von einer Punktreihe (1) und einer Geradenreihe (4) sagen wir, sie seien *konjugiert*, wenn die Gleichung

$$(nm)\,(v\mu) = 0 \tag{5}$$

besteht. Sind beide Reihen regulär, so besagt das Bestehen dieser Gleichung, daß die von ihnen bestimmte projektive Verwandtschaft

$$(mn)\,(\mu\tau)\,(v\sigma) = 0 \tag{6}$$

involutorisch ist (Abb. 1). Ist die Geradenreihe regulär, die Punktreihe singulär, so bedeutet (5), daß der Punkt m der Punktreihe auf der Geraden μ der Geradenreihe liegt (und dual). Sind zugleich Punkt- und Geradenreihe singulär, so sind entweder ihre binären Parameter identisch oder der Punkt der Punktreihe liegt auf der Geraden der Geradenreihe.

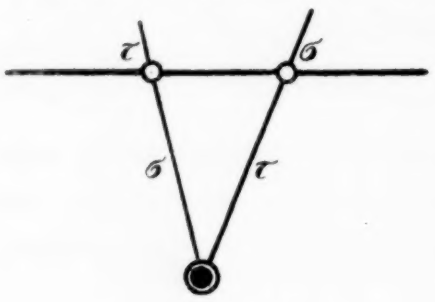


Abb. 1.

Die Gleichung (5) ist die allgemeinste lineare Gleichung in Punktreihenkoordinaten. Sie stellt daher im $\mathfrak{R}_5$, wenn man sich $(nx)\,(v\sigma)$ fest und $(um)\,(\mu\tau)$ variabel vorstellt, den allgemeinsten $\mathfrak{R}_4$ dar. Damit sind die Geradenreihen der Ebene auf die $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{R}_5$ abgebildet. Ist eine Punktreihe zu einer Geradenreihe konjugiert, so entspricht sie einem Punkte, der im Bild-$\mathfrak{R}_4$ der Geradenreihe liegt.

Für das Folgende ist es nötig, auch gewisse andere lineare Punktreihenmannigfaltigkeiten zu kennen.

Ein von zwei Punktreihen aufgespanntes *Punktreihenbüschel*

$$\lambda_1 (um_1)\,(\mu_1\tau) + \lambda_2 (um_2)\,(\mu_2\tau) = 0 \tag{7}$$

hat als Kombinante die Geradenreihe 2. Klasse

$$(xm_1m_2)\,(\mu_1\tau)\,(\mu_2\tau) = 0. \tag{8}$$

Es bestimmt also eine mit Parameterdarstellung versehene („bezifferte“) Kurve 2. Klasse. Die Träger der Punktreihen sind die Tangenten der Kurve. Jede der Tangenten ist durch die Kurve mit einem Parameter versehen. Aus einer festen Tangente schneiden alle übrigen die Parameterdarstellung aus.

Da die Bildgerade eines Büschels $\mathfrak{M}_3^3$ im allgemeinen nicht schneidet, enthält das allgemeine Büschel keine singuläre Punktreihe. Für das Folgende brauchen wir aber die Kenntnis eines speziellen Büschels, das von zwei singulären Punktreihen mit verschiedenen Punkten und binären Parametern aufgespannt wird:

$$\lambda_1 (um_1) \cdot (\mu_2\tau) + \lambda_2 (um_2) \cdot (\mu_1\tau) = 0. \tag{9}$$

Dieses Büschel enthält außer den beiden genannten nur reguläre Punktreihen und diese sind so beschaffen, daß sie für den Parameter μ_2 den Punkt m_2 und für den Parameter μ_1 den Punkt m_1 liefern.

Dual zu den Geraden sind im $\mathfrak{R}_5$ die Räume $\mathfrak{R}_3$. Ihnen entsprechen als Orten von $\mathfrak{R}_4$ die *Büschel von Geradenreihen*, also mit Parameterdarstellung versehene Kurven 2. Ordnung. Als Ort von Punkten stellt ein $\mathfrak{R}_4$ das Gebüsch aller Punktreihen dar, die zu allen Geradenreihen des Büschels konjugiert sind. Darunter befinden sich als singuläre Punktreihen die Punkte der bezifferten Kurve 2. Ordnung selbst, versehen mit den ihnen durch die Parameterdarstellung der Kurve zugeordneten Parametern. Diese singulären Punktreihen werden auf die Punkte der rationalen Raumkurve 3. Ordnung abgebildet, in welcher der Bild-$\mathfrak{R}_3$ des *Punktreihengebüsches* die $\mathfrak{M}_3^3$ schneidet.

Auch hier brauchen wir für das Folgende einen Sonderfall, das *Gebüsch aller Punktreihen, die auf ein und derselben Trägergeraden liegen.* Es enthält ∞^2 singuläre Punktreihen, alle Punkte der Geraden, jeden versehen mit allen binären Parametern. Diese Mannigfaltigkeit wird auf eine, auf $\mathfrak{M}_3^3$ gelegene Fläche 2. Ordnung abgebildet, die einen $\mathfrak{R}_3$, den Bild-$\mathfrak{R}_3$ des Gebüsches aufspannt.

2. *Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ in den R_3.* Soll die $\mathfrak{M}_3^3$ in einen R_3 projiziert werden, so muß die Projektion von einer Geraden $\mathfrak{G}$ aus geschehen. Die Verbindungsebene von $\mathfrak{G}$ mit einem abzubildenden Punkte $\mathfrak{X}$ der $\mathfrak{M}_3^3$ schneidet dann den Bild-R_3 in einem Punkte, der Projektion X' von $\mathfrak{X}$. Umgekehrt ist aber X' nicht das Bild von $\mathfrak{X}$ allein, weil die Ebene $\mathfrak{G}X'$ die $\mathfrak{M}_3^3$ in drei Punkten schneidet. Um die Eineindeutigkeit der Abbildung herbeizuführen, ist es daher nötig, die Gerade $\mathfrak{G}$ speziell so zu wählen, daß sie $\mathfrak{M}_3^3$ in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ schneidet (so daß also $\mathfrak{G}$ nicht Erzeugende von $\mathfrak{M}_3^3$ wird.) Es sei $\mathfrak{P}_1$ das Bild von $(um_1) \cdot (\mu_1 \tau) = 0$ und $\mathfrak{P}_2$ das Bild von $(um_2) \cdot (\mu_2 \tau) = 0$. Damit sind in der Ebene der Punktreihen zwei Punkte m_1, m_2 ausgezeichnet. Wir bezeichnen sie als *absolute Punkte*, ihre Parameter μ_1, μ_2 als *isotrop* und nennen ihre Verbindungslinie *uneigentlich*. Die auf der uneigentlichen Geraden gelegenen Punktreihen werden dann auf einen im $\mathfrak{R}_5$ ausgezeichneten $\mathfrak{R}_3$ abgebildet, der nach dem oben Gesagten $\mathfrak{M}_3^3$ in einer Fläche 2. Ordnung $\mathfrak{F}^2$ schneidet. Wir nennen diesen Raum $\mathfrak{R}_3^0$. Seine Schnittgerade mit dem Bild-R_3 heiße G.

Die durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ laufenden erzeugenden Ebenen $\mathfrak{E}_{\mu_1}$, $\mathfrak{E}_{\mu_2}$ der $\mathfrak{M}_3^3$ schneiden $\mathfrak{R}_3^0$ in je einer Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$. Diese Geraden stellen die uneigentliche Gerade der Ebene einmal als Ort ihrer mit dem Parameter μ_1, das andere Mal mit dem Parameter μ_2 versehenen Punkte dar. Ebenso sind die übrigen, mit $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ der gleichen Schar angehörigen Erzeugenden von $\mathfrak{F}^2$ Schnittgeraden von $\mathfrak{R}_3^0$ mit erzeugenden Ebenen $\mathfrak{E}_\mu$ der $\mathfrak{M}_3^3$. Ihre Punkte stellen daher die mit dem entsprechenden Parameter μ versehenen Punkte der uneigentlichen Geraden dar. Die Erzeugenden der zweiten Schar sind Erzeugende von $\mathfrak{M}_3^3$. Jede von ihnen stellt einen, nacheinander mit allen binären Parametern versehenen uneigentlichen Punkt dar. Unter ihnen befinden sich insbesondere die durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ laufenden Erzeugenden $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$. Die Schnittpunkte $\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_1$ sind die Bildpunkte der singulären Punktreihen $(um_2) \cdot (\mu_1 \tau) = 0$ und $(um_1) \cdot (\mu_2 \tau) = 0$.

Die Ebenen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_2$ schneiden aus G je einen Punkt aus. Wir wollen diese Schnittpunkte J_1, J_2 nennen. Bei der Projektion werden die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_2$ in den Punkt J_1 projiziert. Dieser stellt also dar: 1. alle mit dem Parameter μ_1 versehenen uneigentlichen Punkte und 2. den nacheinander mit allen binären Parametern versehenen Punkt m_2. Entsprechend J_2.

Eine durch $\mathfrak{G}$ laufende Ebene allgemeiner Lage von $\mathfrak{R}_3^0$ schneidet $\mathfrak{F}^2$ in einem regulären Kegelschnitt, der die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ enthält. Dieser Kegelschnitt stellt eine projektive Beziehung zwischen den beiden Erzeugendenscharen von $\mathfrak{F}^2$ her. Man erhält also die entsprechende Mannigfaltigkeit singulärer Punktreihen auf der uneigentlichen Geraden, wenn man in einer der ∞^1 Punktreihen (9), welche den Punkten m_1, m_2 die Parameter μ_1, μ_2 zuordnen, jeden Punkt mit dem ihm durch die Punktreihe zugeordneten Parameter verbindet („Punktreihe als Ort singulärer Punktreihen"). Eine solche Punktreihenmannigfaltigkeit entspricht also einem Punkte allgemeiner Lage von G. *Wir bemerken für später ausdrücklich, daß hiernach zwei singuläre Punktreihen, bestehend aus*

ein und demselben, nicht-absoluten Punkt und verschiedenen binären Parametern auf zwei verschiedene Punkte von G abgebildet werden.

Bei der Projektion von $\mathfrak{G}$ aus werden die Ebenen $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ und $\mathfrak{E}_{\mu_2}$ auf zwei Geraden G_1, G_2 projiziert, die G in den Punkten J_1, J_2 schneiden. Da jede Erzeugende von $\mathfrak{M}_3^3$ die Ebenen $\mathfrak{E}_{\mu_1}, \mathfrak{E}_{\mu_2}$ in einem Punkte trifft, werden die Erzeugenden von $\mathfrak{M}_3^3$ auf die durch die windschiefen Leitgeraden G_1, G_2 bestimmte reguläre lineare Kongruenz abgebildet. Im folgenden denken wir uns G_1, G_2 als konjugiertkomplexe Minimalgeraden des Bildraumes. Die Kongruenz wird dann ein reelles Drehnetz (*Drehnetz des Bild-R_3*).

Eine von $\mathfrak{G}_1$ verschiedene durch $\mathfrak{P}_1$ laufende Gerade der Ebene $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ wird bei der Projektion auf einen von J_1 verschiedenen Punkt von G_1 projiziert. Einem Punkte allgemeiner Lage von G_1 entsprechen daher die singulären Punktreihen bestehend aus den Punkten einer bestimmten Minimalgeraden durch m_1, versehen mit dem Parameter μ_1. Entsprechendes gilt für G_2.

Verbindet man eine Ebene allgemeiner Lage $\mathfrak{E}_\mu$ von $\mathfrak{M}_3^3$ mit $\mathfrak{G}$, so erhält man einen $\mathfrak{R}_4$. Dieser läuft durch $\mathfrak{R}_3^0$; denn $\mathfrak{R}_3^0$ schneidet jede Ebene $\mathfrak{E}_\mu$ von $\mathfrak{M}_3^3$ in einer Geraden $\mathfrak{G}_\mu$, einer Erzeugenden von $\mathfrak{F}^2$. Man kann sich daher $\mathfrak{R}_3^0$ von dieser Geraden $\mathfrak{G}_\mu$ und der Geraden $\mathfrak{G}$ aufgespannt denken. Der Verbindungs-$\mathfrak{R}_4$ $\mathfrak{G}\mathfrak{E}_\mu$ enthält dann $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_\mu$ und damit $\mathfrak{R}_3^0$. Er schneidet infolgedessen den Bild-R_3 in einer durch G laufenden Ebene. Wir nennen die Ebenen durch G *Horizontalebenen*, denken uns also G als die allen Horizontalebenen gemeinsame uneigentliche Gerade. Auch die Minimalgeraden G_1, G_2 verlaufen dann horizontal. Die Achse des Drehnetzes wird vertikal.

Zwei der Horizontalebenen sind ausgezeichnet, die Ebenen GG_1 und GG_2, die als Schnitte der $\mathfrak{R}_4$ entstehen, die $\mathfrak{R}_3^0$ mit $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ und $\mathfrak{E}_{\mu_2}$ verbinden. Wir betrachten die im ersten $\mathfrak{R}_4$ gelegenen Ebenen durch $\mathfrak{G}$. Es sind drei Klassen zu unterscheiden. Die im Raume $\mathfrak{R}_3^0$ verlaufenden Ebenen sind bereits behandelt, sie schneiden die Punkte der Geraden G aus dem Bildraume aus. Ebenso sind die im Verbindungsraume $\mathfrak{G}\mathfrak{E}_{\mu_1}$ gelegenen Ebenen untersucht, sie schneiden die Punkte der Geraden G_1 aus dem Bild-R_3 aus. Eine im Verbindungs-$\mathfrak{R}_4$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ gelegene Ebene allgemeiner Lage durch $\mathfrak{G}$ schneidet aber $\mathfrak{M}_3^3$ nur in den Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und zwar im Punkte $\mathfrak{P}_1$ doppeltzählend. Es entspricht daher allen Punkten allgemeiner Lage der Ebene GG_1 der Punkt $\mathfrak{P}_1$ und damit die singuläre Punktreihe $(um_1) \cdot (\mu_1 \tau) = 0$. In derselben Weise entspricht ein Punkt allgemeiner Lage der Ebene GG_2 der singulären Punktreihe $(um_2) \cdot (\mu_2 \tau) = 0$.

Hiernach können wir über die Abbildung der singulären Punktreihen der Ebene auf die Punkte des Raumes folgende Aussage machen:

Satz 1. *Bei der durch die Projektion von $\mathfrak{M}_3^3$ vermittelten Abbildung der singulären Punktreihen der Ebene auf die Punkte des Bildraumes R_3 werden die singulären Punktreihen mit eigentlichem Punkte und anisotropem Parameter eindeutig umkehrbar auf Punkte des Bildraumes abgebildet. Punktreihen mit gleichem Parameter entsprechen die eigentlichen Punkte einer Ebene. So entstehen ∞^1 Ebenen, die einem Büschel angehören (Horizontalebenen). Die ∞^1 singulären Punktreihen mit gleichem eigentlichen Punkte werden auf eine Gerade eines Drehnetzes abgebildet, dessen Leitgeraden G_1, G_2 die Achse G des Ebenenbüschels treffen. Für die Punktreihen mit isotropem Parameter oder uneigentlichem Punkt gilt:*

Singuläre Punktreihe mit eigentlichem Punkt aber isotropem Parameter μ_1 (μ_2).	*Punkt der Geraden G_1 (G_2).*
Singuläre Punktreihe mit uneigentlichem Punkt und beliebigem Parameter.	*Punkt der Geraden G.*
Insbesondere:	
Singuläre Punktreihe mit uneigentlichem Punkt und isotropem Parameter $\mu_1(\mu_2)$ oder Punkt $m_2(m_1)$ mit beliebigem Parameter.	*Punkt $J_1(J_2)$.*
Punktreihe $(um_1) \cdot (\mu_1\tau) = 0$,	*Beliebiger Punkt der Ebene GG_1.*
Punktreihe $(um_2) \cdot (\mu_2\tau) = 0$.	*Beliebiger Punkt der Ebene GG_2.*

Hiermit ist insbesondere eine *Abbildung der Punkte der Ebene auf eine lineare Kongruenz* gegeben, wobei jedem eigentlichen Punkte eine Gerade des Drehnetzes entspricht, der uneigentlichen Geraden aber nur die Gerade G.

3. *Abbildung der bezifferten Kreise.* Die Abbildung der Punkte von $\mathfrak{M}_3^3$ auf die Punkte von R_3 wurde von den durch $\mathfrak{G}$ laufenden Ebenen $\mathfrak{R}_2$ vermittelt. Wir betrachten jetzt die durch $\mathfrak{G}$ laufenden $\mathfrak{R}_3$. Ein solcher $\mathfrak{R}_3$ allgemeiner Lage schneidet $\mathfrak{M}_3^3$ in einer Raumkurve 3. Ordnung $\mathfrak{C}^3$, die durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ läuft. Es entspricht ihm also eine bezifferte Kurve 2. Ordnung, die durch die absoluten Punkte läuft und diesen Punkten die entsprechenden isotropen Parameter zuordnet. Wir nennen sie einen *bezifferten Kreis.* Andererseits schneidet $\mathfrak{R}_3$ den Bild-R_3 in einer Geraden, so daß wir sagen können:

Satz 2. *Die Abbildung des Satzes* 1 *ordnet einem bezifferten Kreise der Ebene eine Gerade des Bildraumes zu.*

Um diese Abbildung von Ausnahmen zu befreien, ist es notwendig, neben den eben genannten *eigentlichen bezifferten Kreisen* gewisse Ausartungen als *uneigentliche bezifferte Kreise* einzuführen. Diese Figuren werden im folgenden vollständig aufgezählt.

Sonderfälle entsprechen Geraden, die im Bildraume gegenüber den dort ausgezeichneten Geraden G, G_1, G_2 bevorzugte Lage haben:

Die *Gerade G* selbst ist als Schnitt des $\mathfrak{R}_3^0$ Bild aller auf der uneigentlichen Geraden gelegenen singulären Punktreihen.

Eine *Treffgerade allgemeiner Lage von G* entsteht als Schnitt eines $\mathfrak{R}_3$, der $\mathfrak{R}_3^0$ in einer durch $\mathfrak{G}$ laufenden Ebene durchsetzt. Der $\mathfrak{R}_3$ schneidet $\mathfrak{M}_3^3$ erstens längs des Kegelschnittes ($\mathfrak{K}$), den er mit $\mathfrak{F}^2$ gemeinsam hat und zweitens in einer Treffgeraden $\mathfrak{L}$ dieses Kegelschnittes. Diese muß eine in einer Ebene von $\mathfrak{M}_3^3$ gelegene Gerade sein, weil die den Kegelschnitt treffenden Erzeugenden von $\mathfrak{M}_3^3$ ganz in $\mathfrak{R}_3^0$ gelegen sind. Der bezifferte Bildkreis zerfällt daher ($\mathfrak{L}$ entsprechend) in eine eigentliche anisotrope Gerade g, deren sämtliche Punkte mit ein- und demselben anisotropen Parameter μ versehen sind, und einen auf der uneigentlichen Geraden gelegenen Ort singulärer Punktreihen ($\mathfrak{K}$). Es handelt sich um den Ort singulärer Punktreihen, der mit einer regulären Punktreihe verbunden ist, die den absoluten Punkten die entsprechenden isotropen Parameter, dem uneigentlichen Punkte der Geraden g den ausgezeichneten Parameter μ zuordnet. Da die Figur durch die Gerade g und den Parameter μ bestimmt ist, sprechen wir von einer *Parametergeraden.*

Eine *Treffgerade allgemeiner Lage von* G_1 entsteht als Schnitt eines $\mathfrak{R}_3$, der mit der Ebene $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ eine (durch $\mathfrak{P}_1$ laufende) Gerade $\mathfrak{L}$ gemein hat. Der Schnitt des $\mathfrak{R}_3$ mit $\mathfrak{M}_3^3$ zerfällt daher in diese Gerade $\mathfrak{L}$ und einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch den Punkt $\mathfrak{P}_2$, der die Gerade $\mathfrak{L}$ trifft. Entsprechend zerfällt der Bildkreis erstens ($\mathfrak{L}$) in eine Minimalgerade durch m_1, deren sämtliche Punkte mit dem Parameter μ_1 versehen sind, zweitens ($\mathfrak{K}$) in eine Minimalgerade durch m_2, die eine Punktreihe als Ort singulärer Punktreihen trägt. Diese Punktreihe ordnet dem Punkte m_2 den Parameter μ_2, ihrem Schnittpunkte mit der Minimalgeraden durch m_1 den Parameter μ_1 zu. Die Figur ist durch diese Punktreihe vollständig bestimmt: *Punktreihe einer Minimalgeraden als Ort singulärer Punktreihen.*

Eine gemeinsame Treffgerade allgemeiner Lage von G_1, G_2 wird von einem $\mathfrak{R}_3$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ und $\mathfrak{E}_{\mu_2}$ in je einer durch $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ laufenden Geraden ($\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$) schneidet. Die Schnitt-$\mathfrak{C}^3$ zerfällt also in diese beiden Geraden und eine dritte gemeinsame Treffgerade ($\mathfrak{L}$), die dann Erzeugende von $\mathfrak{M}_3^3$ ist. Der bezifferte Bildkreis zerfällt entsprechend in eine Minimalgerade durch m_1, deren sämtliche Punkte mit dem Parameter μ_1 versehen sind ($\mathfrak{L}_1$), eine Minimalgerade durch m_2, deren sämtliche Punkte mit dem Parameter μ_2 versehen sind ($\mathfrak{L}_2$), und den Schnittpunkt dieser Minimalgeraden, der mit allen Parametern versehen ist ($\mathfrak{L}$). Diese Figur wird durch den eigentlichen Schnittpunkt der beiden Minimalgeraden vollständig bestimmt: *Nullkreis.*

Eine durch J_1 *laufende Gerade allgemeiner Lage* wird von einem $\mathfrak{R}_3$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{R}_3^0$ in der Ebene $\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_2$ durchsetzt. Die Schnitt-$\mathfrak{C}^3$ zerfällt daher in die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und eine der ∞^2, in Ebenen von $\mathfrak{M}_3^3$ gelegenen Treffgeraden $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{H}_2$. Der bezifferte Bildkreis besteht dementsprechend aus drei Teilen: Minimalgerade durch m_2, alle Punkte verbunden mit demselben anisotropen Parameter ($\mathfrak{L}$), Punkt m_2, versehen mit allen binären Parametern ($\mathfrak{H}_2$), alle Punkte der uneigentlichen Geraden, versehen mit dem Parameter μ_1 ($\mathfrak{G}_1$).

Eine in der Ebene GG_1 *liegende Gerade allgemeiner Lage* wird von einem $\mathfrak{R}_3$ allgemeiner Lage ausgeschnitten, der durch $\mathfrak{G}$ läuft und in dem von $\mathfrak{R}_3^0$ und $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ aufgespannten $\mathfrak{R}_4$ liegt. Dieser $\mathfrak{R}_3$ schneidet $\mathfrak{R}_3^0$ in einer Ebene allgemeiner Lage durch $\mathfrak{G}$, und damit $\mathfrak{F}^2$ in einem Kegelschnitt ($\mathfrak{K}$) durch $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, und die Ebene $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ in einer durch $\mathfrak{P}$ laufenden Treffgeraden ($\mathfrak{L}$) von $\mathfrak{K}$. Auf der uneigentlichen Geraden wird also eine Punktreihe ausgezeichnet, welche den Punkten m_1, m_2 die Parameter μ_1, μ_2 zuordnet und diese Punktreihe ist als Ort singulärer Punktreihen anzusehen. Der bezifferte Bildkreis zerfällt in diesen Ort ($\mathfrak{K}$) und eine Minimalgerade durch m_1, deren sämtliche Punkte mit dem Parameter μ_1 versehen sind ($\mathfrak{L}$).

Eine durch den Punkt J_1 *laufende und in der Ebene* GG_1 *liegende Gerade allgemeiner Lage* wird von einem $\mathfrak{R}_3$ ausgeschnitten, der in dem Verbindungs-$\mathfrak{R}_4$ $\mathfrak{R}_3^0\mathfrak{E}_{\mu_1}$ enthalten ist und die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_2$ enthält. Ein solcher $\mathfrak{R}_3$ allgemeiner Lage schneidet $\mathfrak{M}_3^3$ in der Geraden $\mathfrak{H}_2$ und in der Geraden $\mathfrak{G}_1$ doppeltzählend. Der entsprechende bezifferte Kreis zerfällt also in die doppeltgezählte uneigentliche Gerade als Ort singulärer Punktreihen mit dem Parameter μ_1 und den Punkt m_2, versehen mit allen Parametern.

Die *Gerade* G_1 selbst schließlich wird von dem $\mathfrak{R}_3$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ mit $\mathfrak{G}$ verbindet. Der entsprechende bezifferte Kreis besteht also aus allen Punkten der Ebene, versehen mit dem Parameter μ_1 und dem Punkt m_2, verbunden mit allen Parametern. Entsprechend G_2.

Nachdem die Mannigfaltigkeit der eigentlichen bezifferten Kreise auf diese Weise durch Mannigfaltigkeiten uneigentlicher bezifferter Kreise zu einem natürlichen Kontinuum erweitert ist, kann sie lückenlos und umkehrbar eindeutig auf die Mannigfaltigkeit der Geraden des R_3 oder die Punkte einer regulären M_4^2 des R_5 abgebildet werden. Da ein eigentlicher bezifferter Kreis ein Element zweiter Ordnung bestimmt, zeigt sich, *daß die geeignet ergänzte Mannigfaltigkeit der eigentlichen Elemente 2. Ordnung lückenlos und umkehrbar-eindeutig auf die Punkte der M_4^2 abgebildet werden kann.* Eine Beziehung dieser Art ist schon von E. Study [8]) angegeben, aber von ganz anderem Standpunkte aus gewonnen worden. Wir wollen hier weder die Abbildung selbst genauer verfolgen, noch den Zusammenhang mit den Studyschen Entwicklungen herstellen.

4. *Isotrop-bezifferte Geradenreihen.* Die Ebenen des Bild-R_3 werden von den durch $\mathfrak{G}$ laufenden $\mathfrak{R}_4$ ausgeschnitten. Ein solcher $\mathfrak{R}_4$ entspricht einer Geradenreihe, welche zu den singulären Punktreihen $(um_1)\cdot(\mu_1\tau)=0$ und $(um_2)\cdot(\mu_2\tau)=0$ konjugiert ist. Im allgemeinen ist der Scheitel der Geradenreihe eigentlich. Die Parameterdarstellung der Geradenreihe ist dann derart, daß ihre Minimalgeraden die ihren uneigentlichen Punkten entsprechenden isotropen Parameter tragen. Wir nennen eine solche Geradenreihe *isotrop-bezifferf*:

Satz 3. *Durch die Abbildung des Satzes* 1 *werden die isotrop-bezifferten Geradenreihen auf Ebenen des Bildraumes abgebildet.*

Ausartungen entsprechen solchen Ebenen, die gegenüber den Geraden G, G_1, G_2 des Bildraumes ausgezeichnete Lage haben.

Eine *Ebene durch G* wird von einem $\mathfrak{R}_4$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{R}_3^0$ enthält. Ein solcher $\mathfrak{R}_4$ schneidet $\mathfrak{M}_3^3$ in $\mathfrak{F}^2$ und in einer erzeugenden Ebene $\mathfrak{E}_\mu$. Die entsprechende, isotrop bezifferte Geradenreihe ist also singulär und besteht aus der mit dem Parameter μ gekoppelten uneigentlichen Geraden. Insbesondere wird die mit dem Parameter μ_1 oder μ_2 gekoppelte uneigentliche Gerade auf die Ebene GG_1 oder GG_2 abgebildet.

Eine *Ebene allgemeiner Lage durch G_1* wird von einem $\mathfrak{R}_4$ ausgeschnitten, der den von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ aufgespannten $\mathfrak{R}_3$ enthält. Ein solcher $\mathfrak{R}_4$ schneidet $\mathfrak{M}_3^3$ in der Ebene $\mathfrak{E}_{\mu_1}$ und einer Fläche 2. Ordnung, welche die durch $\mathfrak{P}_2$ laufende Erzeugende enthält. Die entsprechende, isotrop-bezifferte Geradenreihe ist also wieder singulär und besteht aus einer mit dem Parameter μ_1 gekoppelten, durch den Punkt m_2 laufenden Geraden. Entsprechend: Ebene durch G_2.

Eine *Ebene durch den Schnittpunkt J_1 von G und G_1* wird von einem $\mathfrak{R}_4$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ enthält. Ihm entspricht eine reguläre Geradenreihe mit dem Scheitel m_2, die der uneigentlichen Geraden den Parameter μ_1 zuweist. Entsprechend: Ebene durch J_2.

Nachdem die Mannigfaltigkeit der *eigentlichen isotrop-bezifferten Geradenreihen* durch die eben genannten *uneigentlichen isotrop-bezifferten Geradenreihen* abgeschlossen ist, ist sie ein quaternäres Gebiet geworden, das lückenlos und eindeutig-umkehrbar auf die Ebenen des Bildraumes abgebildet wird.

5. *Übergang von den singulären Punktreihen zu Linienelementen.* Wir halten jetzt eine auf der uneigentlichen Geraden gelegene reguläre Punktreihe fest, welche dem Punkte m_1 den Parameter μ_1, dem Punkte m_2 den Parameter μ_2 zuordnet. Wir nennen die ausgezeichnete Punktreihe *Parameterreihe.*

---

[8]) E. Study, Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie, Berichte des Sächs. Ges. d. Wiss. 1901, S. 338-403.

Ist jetzt in der Ebene eine singuläre Punktreihe mit einem beliebigen Parameter μ vorgegeben, so entspricht diesem Parameter ein Punkt der Parameterreihe, also ein uneigentlicher Punkt, eine Richtung: *aus der singulären Punktreihe wird ein Linienelement. Unsere Abbildung der singulären Punktreihen wird eine Abbildung der Linienelemente. Diese Abbildung der Linienelemente auf die Punkte von* $\mathfrak{M}_3^3$ *wird eindeutig-umkehrbar und singularitätenfrei*, wenn wir die Mannigfaltigkeit der Linienelemente mit eigentlichem Punkt durch ∞^2 uneigentliche Linienelemente abschließen. Dabei ist ein uneigentliches Linienelement als Figur eines mit einer Richtung gekoppelten uneigentlichen Punktes, mit anderen Worten, als *geordnetes Paar uneigentlicher Punkte* erklärt.

Singularitäten stellen sich erst bei der Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ in den Bildraum ein. Satz 1 liefert:

Satz 4. *Bei der durch Projektion von* $\mathfrak{M}_3^3$ *vermittelten Abbildung der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Bildraumes werden die Linienelemente mit eigentlichem Punkt und anisotroper Richtung eindeutig-umkehrbar auf Punkte des Bildraumes abgebildet. Linienelementen mit gleicher Richtung entsprechen die eigentlichen Punkte einer Ebene (Horizontalebene). Die* ∞^1 *Linienelemente durch einen eigentlichen Punkt werden auf eine Gerade eines Drehnetzes mit vertikaler Achse abgebildet. Für Linienelemente mit isotroper Richtung oder uneigentlichem Punkte gilt:*

Alle Elemente einer Minimalgeraden durch $m_1(m_2)$	*Punkt der Geraden* $G_1(G_2)$.
Uneigentliches Linienelement	*Punkt der Geraden G.*
Beliebiger uneigentlicher Punkt mit isotroper Richtung $\mu_1(\mu_2)$ *oder Punkt* $m_2(m_1)$ *mit beliebiger Richtung*	*Schnittpunkt* $J_1(J_2)$ *von G und* $G_1(G_2)$.
Punkt $m_1(m_2)$ *mit Richtung* $\mu_1(\mu_2)$	*Beliebiger Punkt der Ebene* GG_1 (GG_2).

6. *Abbildung der orientierten Kreise auf Geraden des Bildraumes.* Wir untersuchen jetzt, welche Orte von Linienelementen den Geraden des Bildraumes entsprechen. Eine Gerade des Bildraumes gibt nach Satz 2 einen bezifferten Kreis, den wir zunächst als eigentlich voraussetzen. Er wird dann mit der Parameterreihe, weil er mit ihr die absoluten Punkte entsprechend gemein hat, perspektiv. Es ist also auf ihm ein Punkt z als Zentrum der Perspektivität ausgezeichnet und in jedem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte des Kreises entsteht so ein Linienelement, dessen Gerade durch den Punkt z hindurchläuft. Wir wollen einen Kreis mit ausgezeichnetem Punkte z im folgenden kurz einen *befestigten Kreis* [9]) nennen (Abb. 2). Durch unsere Abbildung werden die befestigten Kreise auf die Geraden des Bildraumes abgebildet. Wir verzichten darauf, mit Hilfe der Nr. **4** alle Ausartungen der Figur aufzuzählen und erwähnen nur, daß zu den befestigten Kreisen die Punkte (alle Linienelemente durch den Punkt, dazu die Linienelemente der durch den Punkt laufenden Minimalgeraden) und die Parametergeraden (ihre eigentlichen Elemente haben alle die gleiche Richtung) gehören.

Die Konstruktion, die dem Verbinden zweier Punkte des Bild-Raumes durch eine Gerade entspricht, erhält im allgemeinen Falle in der Ebene folgende Gestalt: Gegeben sind zwei Linienelemente $(up_1) \cdot (\pi_1\tau) = 0$, $(up_2) \cdot (\pi_2\tau) = 0$. Der Schnittpunkt ihrer Geraden sei p. Dann ist der durch p_1, p_2 laufende und durch den Punkt p befestigte Kreis der gesuchte befestigte Verbindungskreis.

[9]) Mit L. Tuschel, Über eine Schraubenliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung, Sitzber. Ak. d. Wiss. Wien, Abtl. IIa, **120** (1911), S. 231-254.

Durch die Befestigung des Kreises ist ein ganz bestimmter anisotroper Parameter und mit ihm eine Richtung ausgezeichnet, der Parameter des Punktes z, die Richtung der Kreistangente im Punkte z. Wir wollen jetzt die *Figur aller befestigten Kreise untersuchen, die zu derselben (anisotropen) Richtung gehören.* Diese *Grundrichtung* denken wir uns beliebig (z. B. horizontal) ausgewählt und dann ein für allemal festgehalten. Es ist dann zu bedenken, daß jeder vorgegebene Kreis auf zwei verschiedene Weisen in einen zur Grundrichtung gehörigen befestigten Kreis verwandelt werden kann, da man ja von dem ausgezeichneten uneigentlichen Punkte aus zwei Tangenten an den Kreis legen kann. Da die Unterscheidung dieser beiden Tangenten einen Orientierungsprozeß darstellt, sprechen wir im folgenden von *orientierten Kreisen.* (Die Orientierung war erst nach Auszeichnung der Grundrichtung möglich.) Wir fragen dann nach dem Bilde der ∞^3 zur Grundrichtung gehörigen orientierten Kreise und behaupten, daß die ∞^3 entsprechenden Geraden des Bildraumes einen linearen Komplex bilden, der das ausgezeichnete Drehnetz enthält.

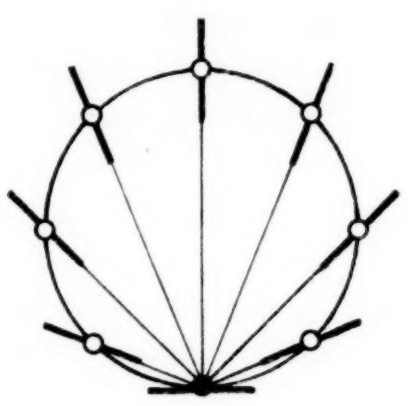


Abb. 2.

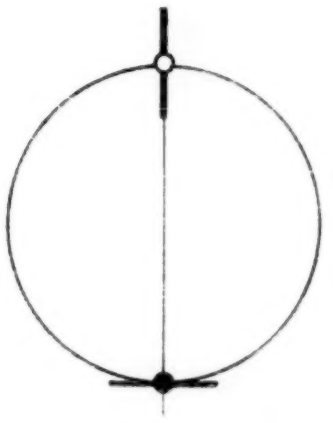


Abb. 3.

Es sei q der zur Grundrichtung v gehörige uneigentliche Punkt. Die zu v orthogonale Richtung heiße v', der entsprechende uneigentliche Punkt q'. Ein orientierter Kreis kann dann durch zwei seiner Elemente bestimmt werden, das in z in der Grundrichtung tangierende Element und das Element mit der dazu orthogonalen Richtung (Abb. 3). Wir betrachten nun die Verwandtschaft, die zwischen den Linienelementen der Richtung v und den Elementen der Richtung v' durch die orientierten Kreise hergestellt wird: Auf einer festen Geraden der Richtung v' wird jedes Element der Richtung v mit jedem Element der Richtung v' durch einen orientierten Kreis verbunden. Diese einfache Bemerkung gestattet sofort die Konstruktion der entsprechenden Geradenmannigfaltigkeit im Bildraum.

Die Linienelemente der Richtungen v, v' werden auf die Punkte der beiden, zum Ebenenpaar GG_1, GG_2 harmonischen Ebenen $E_v, E_{v'}$ abgebildet. Den Linienelementen $(uq') \cdot (v\tau) = 0$, $(uq') \cdot (v'\tau) = 0$ entsprechen zwei verschiedene, auf G gelegene und zu J_1, J_2 harmonische Punkte Q_v und $Q_{v'}$. Linienelemente, deren Punkte auf einer Geraden durch den Punkt q' liegen, werden, je nachdem sie die Richtung v oder v' haben, auf die Punkte einer in der Ebene E_v bzw. $E_{v'}$ gelegenen, durch Q_v bzw. $Q_{v'}$ laufenden Geraden abgebildet. Diese beiden Geradenbüschel sind aber projektiv dadurch auf einander bezogen, daß ein und derselben Geraden der Ebene zwei zugeordnete Geraden der beiden Büschel entsprechen. Diese Zuordnung ist zudem so beschaffen, daß die Gerade G sich selbst entspricht. Ebenso wie nun jeder der ∞^3 orientierten Kreise gewonnen werden kann, indem man zwei Linienelemente der Grundrichtung und der zu ihr orthogonalen Richtung mit Punkten auf einer Geraden durch q' durch einen orientierten Kreis verbindet, erhält man die Bildgeraden der orientierten Kreise, wenn man im Bildraume

Punkte entsprechender Geraden der beiden projektiven Büschel verbindet. Auf diese Art entsteht aber nach Sylvester ein linearer Komplex. Dieser läuft durch das ausgezeichnete Drehnetz, weil die Mannigfaltigkeit der orientierten Kreise die Mannigfaltigkeit der Nullkreise umfaßt. Also:

Satz 5. *Nach Auszeichnung einer anisotropen Grundrichtung ordnet die Abbildung des Satzes* 1 *den orientierten Kreisen der Ebene die Geraden eines durch das ausgezeichnete Drehnetz laufenden regulären linearen Komplexes zu. Jeder Richtung der Ebene entspricht so ein Komplex des durch das Drehnetz laufenden Büschels. Den beiden Minimalrichtungen entsprechen die beiden singulären Komplexe des Büschels.*

7. *Zusammenhang mit dem Netzrißverfahren. Abbildung der linearen Komplexe allgemeiner Lage.* Nachdem wir so durch unsere Abbildung eine spezielle Art linearer Komplexe des Bildraumes, die Bilder der Komplexe durch das ausgezeichnete Drehnetz, gewonnen haben, wollen wir jetzt umgekehrt untersuchen, welche Kreisfigur einem linearen Komplex allgemeiner Lage des Bildraumes in der Ebene der Linienelemente entspricht. Da die Geraden des Drehnetzes sich besonders einfach, nämlich auf Punkte (Nullkreise) der Ebene, abbilden, liegt es nahe, den abzubildenden Komplex mit dem Drehnetz zum Schnitt zu bringen und zunächst die Schnittregelschar zu übertragen. Diese läuft durch die Punkte J_1, J_2 hindurch, wird also auf die Punkte eines Kreises abgebildet. Da der Komplex die Regelschar ganz enthält, schneidet er die polare Regelschar in einem Paar verschiedener Geraden. Durch diese ist der Komplex dann vollständig bestimmt, denn er kann nach Chasles als Ort der Treffgeraden entsprechender Erzeugenden der in der polaren Regelschar durch das ausgezeichnete Geradenpaar bestimmten Involution gewonnen werden.

Nach wie vor halten wir nun in der Ebene der Linienelemente die Grundrichtung v und ihr entsprechend im Bildraume die Ebene E_v fest. Die in dieser Ebene gelegenen Nullgeraden bilden dann ein Büschel, dessen Scheitel der Bildpunkt der singulären Punktreihe $(us) \cdot (v\tau) = 0$ sei. Die Berührungspunkte der von ihm an den Kreis gelegten Tangenten bestimmen die beiden Ruheerzeugenden der vom Komplex auf der polaren Regelschar hervorgerufenen Involution. Daher ist der Komplex durch den Kreis, den die Regelschar aus der Ebene E_v ausschneidet und durch den — nicht auf diesem Kreise gelegenen — Bildpunkt der singulären Punktreihe $(us) \cdot (v\tau) = 0$ vollständig bestimmt. Die Figur des Kreises und des Punktes nennen wir mit Eckhart ein *Kreis-Punkt-Element*. Das Kreis-Punkt-Element ist der *Netzriß* des Komplexes in der Ebene E_v [10]).

Es handelt sich jetzt darum, die Bilder der im linearen Komplexe enthaltenen Geraden anzugeben, wenn in der Ebene der Linienelemente das Bild des Netzrisses gegeben ist: der Bildkreis der Regelschar (Grundkreis) und das Linienelement $(us) \cdot (v\tau) = 0$.

Wir beginnen damit, die befestigten Bildkreise der Erzeugenden der polaren Regelschar anzugeben. Es handelt sich um diejenigen befestigten Kreise, die aus dem Grundkreis hervorgehen, wenn man ihn an einem beliebigen seiner Punkte befestigt.

Wir suchen weiter das Bild der in der polaren Regelschar induzierten Involution. Der in der Ebene E_v gelegene Kreis wird auf die Mannigfaltigkeit der Linienelemente mit

---

[10]) Das Verfahren der windschiefen Projektion stammt von L. Tuschel (a. a. O. [9])). Der Name Netzriß für den Fall, daß die zur windschiefen Projektion verwandte lineare Kongruenz ein Drehnetz ist, wurde von E. Müller eingeführt: Über Punkttransformationen, welche die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen, Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien, Abt. IIa, **126** (1917), S. 915-929. Dort werden auch die Netzrisse der geraden Linien behandelt. Eine ausführliche Untersuchung erfährt die Abbildung der linearen Komplexe mittels des Netzrißverfahrens durch L. Eckhart, Eine Abbildung der linearen Strahlenkomplexe auf die Ebene, Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien, Abt. IIa, **127** (1918), S. 91-118.

der Richtung v abgebildet, deren Punkte auf dem Grundkreise liegen. Zu ihm tritt das Linienelement $(us) \cdot (v\tau) = 0$.

Eine Gerade durch s schneidet nun den Grundkreis in zwei Punkten q_1, q_2. Es sind die Punkte zweier Linienelemente der Richtung v. Ihre Bildpunkte liegen auf zwei durch die Involution gepaarten Erzeugenden der polaren Regelschar. Um die Befestigungspunkte der Bildkreise dieser Erzeugenden zu erhalten, bringen wir die durch die beiden Linienelemente bestimmten Geraden mit dem Grundkreise zum Schnitt. Die neuen Schnittpunkte q_1', q_2' sind die gesuchten Befestigungspunkte. Sie gehören, wie man unmittelbar einsieht (Abb. 4), ebenfalls einer Involution an. Der Mittelpunkt dieser Involution sei t. Durch den Punkt t werden dann die auf dem Grundkreise gelegenen befestigten Kreise in der Weise gepaart, daß zwei befestigte Kreise sich entsprechen, wenn die Verbindungslinie ihrer Befestigungspunkte durch t läuft.

Man erhält nun die befestigten Bildkreise der Geraden des linearen Komplexes, wenn man ein Linienelement eines ersten auf dem Grundkreise gelegenen befestigten Kreises mit einem Linienelement des zugeordneten befestigten Kreises verbindet (Abb. 5).

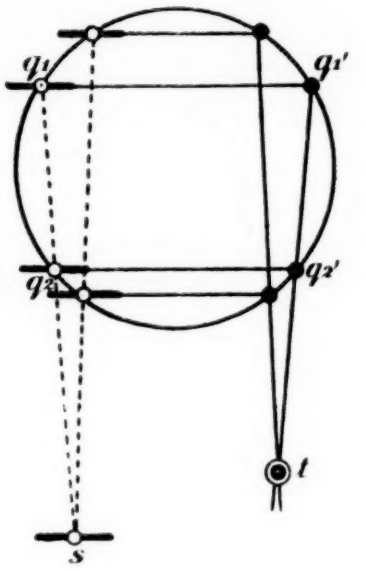


Abb. 4.

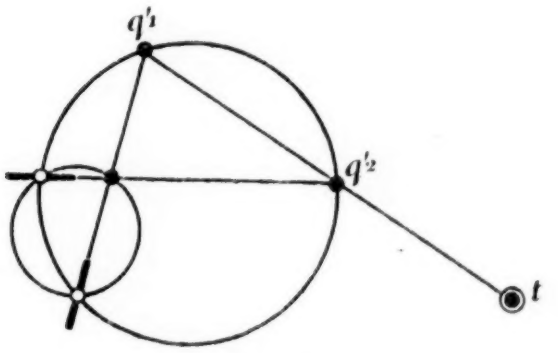


Abb. 5.

In diesem, von dem Eckhartschen also etwas verschiedenen und weiteren Sinne sagen wir:

Satz 6. *Einem Komplex allgemeiner Lage des Bildraumes entspricht ein Punkt-Kreis-Element (Grundkreis und Mittelpunkt t der Involution).*

8. *Übergang zu Elementvereinen.* Wir kehren zu der Abbildung der Nr. **6** zurück. Die dort abgebildeten, von uns sogenannten „orientierten Kreise" sind nicht orientierte Kreise im üblichen Sinne, nämlich keine Elementvereine. Wir geben jetzt eine Transformation (T) an, welche unsere „orientierten Kreise" in kreisförmige Elementvereine transformiert. Dabei beschränken wir uns auf reelle und eigentliche Elemente.

Die Horizontalrichtung der Ebene sei als Grundrichtung ausgezeichnet. Ein „orientierter Kreis" ist dann ein Kreis, der an einem seiner beiden Schnittpunkte mit dem vertikalen Durchmesser befestigt ist. Wir drehen nun jedes Element um seinen Punkt so lange, bis es den Kreis berührt, also um denselben Winkel, den das Element mit der Grundrichtung bildet. Um dann einen eindeutig-umkehrbaren Übergang von den alten zu den neuen Linienelementen zu erreichen, wird es notwendig, die Grundrichtung und die neuen Linienelemente zu orientieren: *Jedem orientierten Linienelemente entspreche (eindeutig) dasjenige nicht orientierte Linienelement durch den gleichen Punkt,*

das auf der eindeutig bestimmten Winkelhalbierenden zwischen orientierter Grundrichtung und Richtung des orientierten Elementes liegt (Transformation T, Abb. 6).

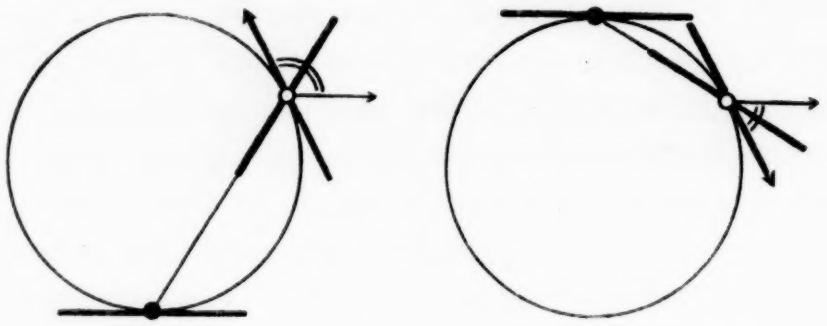


Abb. 6.

Bei dieser Transformation geht ein „orientierter Kreis" im Sinne der Nr. 6 (eine geeignete Parametergerade) [11]) in einen orientierten Kreis (eine orientierte Gerade) im üblichen Sinne über:

Satz 7. *Nach Ausführung der Transformation T, welche die nicht-orientierten Linienelemente in orientierte Linienelemente überführt, geht die Abbildung des Satzes* 5 *in die Liesche Abbildung der orientierten Kreise auf Geraden eines linearen Komplexes über* [12]).

Wir schließen mit der Bemerkung, daß die Projektion der $\mathfrak{M}_3^3$ von einer Geraden allgemeiner Lage aus ein nichteuklidisches Analogon zu unserer Abbildung liefern würde.

[11]) Es handelt sich um die Parametergeraden, deren Elemente (analog zu den Elementen eines „orientierten Kreises") als Richtung die Halbierende des von der orientierten Geraden selbst und der orientierten Grundrichtung gebildeten Winkels haben.

[12]) S. Lie, G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I, Leipzig 1896, S. 238.

Eingegangen 17. Dezember 1936.